Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zbyněk Nádeník

O jistém vyjádření podmínek, aby osm bodů kvartiky s trojnásobným bodem leželo na kuželosečce

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D261--D265

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123871`

Intégrales de Fresnel généralisées. Nous convenons d'appeler intégrales de Fresnel généralisées les integrales du type $\int\limits_0^\infty \cos x^{2k}\, dx$ et $\int\limits_0^\infty \sin x^{2k}\, dx$; $(k > \frac{1}{2})$. On les calcules à l'aide du théorème de Cauchy sur les résidus et l'on trouve finalement:

$$\int\limits_0^\infty \cos x^{2k}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k} \cos \frac{\pi}{4k}$$

$$\int\limits_0^\infty \sin x^{2k}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k} \sin \frac{\pi}{4k}.$$

O JISTÉM VYJÁDŘENÍ PODMÍNEK, ABY OSM BODŮ KVARTIKY S TROJNÁSOBNÝM BODEM LEŽELO NA KUŽELOSEČCE.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

Kvartika s obyčejným trojnásobným bodem v bodě $0_3(0, 0, 1)$ má rovnici

$$x_1x_2(x_1 - x_2)x_3 + u_4(x_1, x_2) = 0, \tag{1}$$

kde $u_4(x_1, x_2)$ je binární forma dimense 4 proměnných x_1, x_2 s nenulovými koeficienty u x_1^4 a x_2^4. Transformací

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_2', \; x_3 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3'$$

lze při vhodné volbě konstant α_1, α_2, α_3 uvésti (1) na tvar (místo x_1', x_2', x_3' píšeme zase x_1, x_2, x_3)

$$x_1x_2(x_1 - x_2)x_3 + Ax_1^4 + Bx_1^2x_2^2 + x_4^2 = 0, \; A \neq 0$$

čili

$$x_1x_2(x_1 - x_2)x_3 + (x_2^2 - \lambda x_1^2)(x_2^2 - \mu x_1^2) = 0, \tag{2}$$

kde λ, μ jsou konstanty splňující nerovnost

$$\lambda\mu \neq 0.$$

Položíme-li $x_2 = kx_1$, odvodíme z (2) snadno parametrické vyjádření uvažované kvartiky:

$$x_1 = k(k - 1), \; x_2 = k^2(k - 1), \; x_3 = (k^2 - \lambda)(k^2 - \mu). \tag{3}$$

Označme obvyklým způsobem základní symetrické funkce

$$s_1 = \Sigma k_1, \; s_2 = \Sigma k_1 k_2, \ldots. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (3) do rovnice přímky $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, dostaneme pro parametry k_1, k_2, k_3, k_4 jejích průsečíků s kvartikou vztahy (můžeme položit $a_3 = 1$)

$$s_1 = -a_2, \; s_2 = a_1 - a_2 - (\lambda + \mu), \; s_3 = a_1, \; s_4 = \lambda\mu,$$

z nichž eliminací a_1, a_2 plyne

$$s_4 - \lambda\mu = 0,\ s_3 - s_2 + s_1 - (\lambda + \mu) = 0 \tag{5}$$

jakožto *nutná a postačující podmínka pro to, aby čtyři body kvartiky s parametry k_1, k_2, k_3, k_4 ležely v přímce.* Rovnice (5) lze přepsati na

$$s_4 - \lambda\mu = 0,\ \prod_{i=1}^{4}(1 - k_i) - (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0.$$

Rovnice kuželosečky neprocházejí bodem $0_3(0, 0, 1)$ je $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ ($i, k = 1, 2, 3; a_{ik} = a_{ki}$), kde můžeme položit $a_{33} = 1$. Pro parametry $k_1, k_2, \ldots, k_8$ jejích průsečíků s kvartikou platí:

$$s_1 = -a_{23}, \tag{6}$$
$$s_2 = a_{22} + a_{13} - a_{23} - 2(\lambda + \mu), \tag{7}$$
$$s_3 = 2a_{22} - a_{12} + a_{13} + a_{23}(\lambda + \mu), \tag{8}$$
$$s_4 = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{13}(\lambda + \mu) + a_{23}(\lambda + \mu) + \lambda^2 + 4\lambda\mu + \mu^2, \tag{9}$$
$$s_5 = 2a_{11} - a_{12} + a_{23}\lambda\mu - a_{13}(\lambda + \mu), \tag{10}$$
$$s_6 = a_{11} + a_{13}\lambda\mu - a_{23}\lambda\mu - 2(\lambda + \mu)\lambda\mu, \tag{11}$$
$$s_7 = a_{13}\lambda\mu, \tag{12}$$
$$s_8 = \lambda^2\mu^2. \tag{13}$$

Z (6), (7), (11) a (12) plyne snadno

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{1}{\lambda\mu} s_7,\ a_{23} = -s_1, \\ a_{11} &= -s_7 + s_6 - \lambda\mu s_1 + 2(\lambda + \mu)\lambda\mu, \\ a_{22} &= -\frac{1}{\lambda\mu} s_7 + s_2 - s_1 + 2(\lambda + \mu). \end{aligned} \tag{14}$$

Odečtením rovnic (8) a (10) od (9) získáme za použití (14)

$$\begin{aligned} V_2 \equiv s_7 - s_6 + s_5 - s_4 + s_3 - s_2 + s_1 - \\ - (\lambda + \mu)(2\lambda\mu - \lambda + \mu + 2) - \lambda\mu = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Odečtením rovnice (10) od (8) plyne — použijeme-li zase vztahů (14) —

$$\begin{aligned} V_3 \equiv \frac{1}{\lambda\mu}(2\lambda\mu + \lambda + \mu - 1)s_7 - 2s_6 + s_5 - s_3 + 2s_2 - \\ - (-\lambda\mu + \lambda + \mu + 2)s_1 - 4(\lambda + \mu)(\lambda\mu - 1) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Relace

$$V_1 \equiv s_8 - \lambda^2\mu^2 = 0,\ V_2 = 0,\ V_3 = 0$$

vyjadřují *nutnou a postačující podmínku pro to, aby osm bodů kvartiky s parametry $k_1, k_2, \ldots, k_8$, ležících mimo její trojnásobný bod, bylo na kuželosečce.* Rovnice (15) je ekvivalentní s

$$W_2 \equiv \prod_{i=1}^{8}(1 - k_i) - (1 - \lambda)^2 (1 - \mu)^2 = 0.$$

Nechť jsou nyní na kvartice dány dvě čtveřice bodů s parametry

$$k_1' = k_1,\ k_2' = k_2,\ k_3' = k_3,\ k_4' = k_4$$

resp. (17)

$$k_1'' = k_5,\ k_2'' = k_6,\ k_3'' = k_7,\ k_4'' = k_8,$$

ležících v přímkách p', p'', neprocházejících trojnásobným bodem kvartiky. Ty skládají kuželosečku. To znamená, že *s anulováním výrazů* (s_i' resp. s_i'' ($i = 1, 2, 3, 4$) značí základní symetrické funkce (4) tvořené z parametrů (17))

$$\begin{aligned} v' &\equiv s_4' - \lambda\mu, \quad w' \equiv s_3' - s_2' + s_1' - (\lambda + \mu), \\ v'' &\equiv s_4'' - \lambda\mu, \quad w'' \equiv s_3'' - s_2'' + s_1'' - (\lambda + \mu) \end{aligned} \tag{18}$$

musí identicky vymizet výrazy V_1, V_2, V_3 a ovšem i W_2. U V_1 a W_2 je to zřejmé.

Klademe si za úkol upravit i výraz V_3 *v* (třeba nehomogenní) *formu ve* v', v'', w', w'' *bez absolutního členu.*

Z (18) plyne

$$\begin{aligned} s_4' &\equiv v' + \lambda\mu, \quad s_3' \equiv w' + s_2' - s_1' + \lambda + \mu, \\ s_4'' &\equiv v'' + \lambda\mu, \quad s_3'' \equiv w'' + s_2'' - s_1'' + \lambda + \mu; \end{aligned}$$

dosadíme-li odtud za s_3', s_3'', s_4', s_4'' do rovnic

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1' + s_1'', \\ s_2 &= s_2' + s_1's_1'' + s_2'', \\ s_3 &= s_3' + s_2's_1'' + s_1's_2'' + s_3'', \\ s_4 &= s_4' + s_3's_1'' + s_2's_2'' + s_1's_3'' + s_4'', \\ s_5 &= s_4's_1'' + s_3's_2'' + s_2's_3'' + s_1's_4'', \\ s_6 &= s_4's_2'' + s_3's_3'' + s_2's_4'', \\ s_7 &= s_4's_3'' + s_3's_4'', \\ s_8 &= s_4's_4'', \end{aligned}$$

dostaneme, píšeme-li jen členy obsahující v', v'', w', w'':

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_1' + s_1'', \\ s_2 &= s_2' + s_1's_1'' + s_2'', \\ s_3 &= w' + w'' + \ldots, \\ s_5 &= v's_1'' + v''s_1' + w's_2'' + w''s_2' + \ldots, \\ s_6 &= w'w'' + v's_2'' + v''s_2' + (\lambda + \mu)(w' + w'') + w'(s_2'' - s_1'') + \\ &\quad + w''(s_2' - s_1') + \ldots, \\ s_7 &= v'w'' + v''w' + (\lambda + \mu)(v' + v'') + v'(s_2'' - s_1'') + \\ &\quad + v''(s_2' - s_1') + \lambda\mu(w' + w'') + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Uvažme, že s_3', s_4', s_3'', s_4'' a tedy ani v', v'', w', w'' nelze vyjádřiti jen na základě s_1', s_2', s_1'', s_2''. To znamená, že dosadíme-li do výrazu V_3 za s_1, s_2, s_3, s_5, s_6, s_7 z (19), anuluje se součet všech členů kromě těch, jež vznikly z členů vypsaných v (19), neboť víme, že V_3 musí býti forma ve v', v'', w', w'' bez absolutního členu. Tímto způsobem dostaneme po úpravě

$$V_3 = \frac{1}{\lambda\mu}\{(2\lambda\mu + \lambda + \mu - 1)(v'w'' + v''w') - 2\lambda\mu w'w'' +$$
$$+ (2\lambda\mu + \lambda + \mu - 1)(\lambda + \mu)(v' + v'') + \lambda\mu(2\lambda\mu - \lambda + \mu - 2) .$$
$$. (w' + w'') +$$
$$+ [(\lambda + \mu - 1)s_2'' - (\lambda\mu + \lambda + \mu - 1)s_1'']v' +$$
$$+ [(\lambda + \mu - 1)s_2' - (\lambda\mu + \lambda + \mu - 1)s']v'' -$$
$$- \lambda\mu(s_2'' - 2s_1'')w' - \lambda\mu(s_2' - 2s_1')w''\}.$$

To ovšem není jediný možný hledaný tvar výrazu V_3. K osmi jiným bychom dospěli, kdybychom z (18) místo s_3' a s_3'' vyjádřili kteroukoliv jinou dvojici z členů s_3', s_2', s_1', s_3'', s_2'', s_1'' a postupovali dále právě tak, jak ukázáno. Zřejmě však více než těchto devět tvarů neexistuje.

Kdybychom výraz V_3 chtěli vyjádřiti jako formu uvedených vlastností ve v', v'', $\overline{w}'$, $\overline{w}''$, kde

$$\overline{w}' = \prod_{i=1}^{4} (1 - k_i') - (1 - \lambda)(1 - \mu), \overline{w}'' = \prod_{i=1}^{4} (1 - k_i'') - (1 - \lambda)(1 - \mu),$$

stačilo by do právě nalezeného tvaru výrazu V_3 dosadit

$$w' = v' - \overline{w}', \quad w'' = v'' - \overline{w}'';$$

k zjednodušení to však nevede.

Dokázali jsme tak explicitně, že koeficienty u v', v'', w', w'' v hledaném vyjádření výrazu V_3 neobsahují jen λ a μ. Lze to i jinak dokázat, při čemž současně vynikne i jiná věc.

Řešme úlohu:

Je dán výraz

$$V \equiv a_0s_8 + a_1s_7 + \ldots + a_7s_1 + a_8, \tag{20}$$

kde a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, 8$) jsou symetricky složené z λ a μ. Kdy lze výraz V vyjádřiti jako formu ve v', v'', w', w'' bez absolutního členu, jejíž koeficienty jsou funkcemi jen λ a μ?

Hledaná forma zřejmě musí býti kvadratická a symetrická ve v', v'', w', w''; ježto V je lineární v $k_1, k_2, \ldots, k_8$, nemůže obsahovat členy $v'w'$ a $v''w''$. Je tedy nutně tvaru

$$V \equiv av'v'' + b(v'w'' + v''w') + cw'w'' + d(v' + v'') + e(w' + w''), \tag{21}$$

při čemž alespoň jeden z koeficientů a, b, c je různý od nuly.

Určeme součty členů týchž stupňů v parametrech (17) ve vyjádření (21) výrazu V. I je součet členů stupně

8. $as_4's_4'' = as_8$,
7. $b(s_4's_3'' + s_3's_4'') = bs_7$,
6. $b(s_4's_2'' + s_2's_4'') + cs_3's_3''$,
5. $b(s_4's_1'' + s_1's_4'') - c(s_3's_2'' + s_2's_3'')$,
4. $-\{a\lambda\mu + b(\lambda + \mu) - d\}(s_4' + s_4'') + c(s_3's_1'' + s_2's_2'' + s_1's_3'')$,
3. $-\{b\lambda\mu + c(\lambda + \mu) - e\}(s_3' + s_3'') - c(s_2's_1'' + s_1's_2'')$,
2. $\{b\lambda\mu + c(\lambda + \mu) - e\}(s_2' + s_2'') + cs_1's_1''$,
1. $-\{b\lambda\mu + c(\lambda + \mu) - e\}(s_1' + s_1'') = -\{b\lambda\mu + c(\lambda + \mu) - e\}s_1$,
0. $a\lambda^2\mu^2 + 2b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda + \mu)^2 - 2d\lambda\mu - 2e(\lambda + \mu)$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby součet členů stupně r-tého ($r = 2, 3, \ldots, 6$) dal s_r, je:

$$b\lambda\mu + c(\lambda + \mu) - e = c,$$
$$a\lambda\mu + b(\lambda + \mu) - d = -c, \quad b = -c.$$

Z těchto rovnic plyne

$$c = -b, \; d = a\lambda\mu + b(\lambda + \mu - 1),$$
$$e = b(\lambda\mu - \overline{\lambda + \mu} + 1),$$

takže forma (21) je tvaru

$$V = av'v'' + b(v'w'' + v''w') - bw'w'' + \{a\lambda\mu + b(\lambda + \mu - 1)\}(v' + v'') + b(\lambda\mu - \overline{\lambda + \mu} + 1)(w' + w''), \tag{22}$$

při čemž $a = a_0$, $b = a_1$.

Ježto nemůže býti současně $a = b = 0$, mohou nastat tři možnosti:

1. $a \neq 0$, $b = 0$. Forma (22) je

$$a\{v'v'' + \lambda\mu(v' + v'')\}$$

a je zřejmě násobkem levé strany podmínky $V_1 = s_8 - \lambda^2\mu^2 = 0$.

2. $a = 0$, $b \neq 0$. Forma (22) je

$$b\{(v'w'' + v''w') - w'w'' + (\lambda + \mu)(v' + v'') + (\lambda\mu - \overline{\lambda + \mu} + 1) \cdot (w' + w'')\};$$

dosadíme-li do ní za v' v'', w', w'' z (18), dostaneme snadno násobek levé strany V_2 podmínky (15).

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$. V tomto případě eliminujme z výrazu (20) a V_2 člen s_7; tím dostaneme zase výraz tvaru (20), v němž $a_1 = b = 0$, tedy podle 1. nejvýše až na faktor výraz V_1.

Tím jsme dokázali:

Výraz (20) *lze vyjádřiti formou* (21) *tehdy a jen tehdy, když*

$$V = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2,$$

kde ν_1, ν_2 *jsou ovšem funkcemi jen* λ *a* μ.

Poněvadž výraz V_3 není lineární kombinací výrazů V_1, V_2, nelze jej vyjádřiti formou (21).

(Z matematického semináře prof. Dr B. Bydžovského.)

*

Sur certaine explication des conditions pour que huit points d'une courbe du quatrième degré avec un point triple soient sur une conique. — Dans cet article on trouve les conditions nécessaires et suffisantes (13), (15), (16) pour que 8 points d'une courbe plane du quatrième degré avec un point triple soient sur une conique. Pour deux quaternes de points de cette courbe qui sont sur deux droites, on s'annulle les expressions v', w', v'', w'' en (18) et les conditions (13), (15), (16) deviennent les identités. On accommode l'expression V_3 en (16) dans une forme en v', w', v'', w'' sans le membre absolu.