

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Láska

O grafickém řešení rovnic. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 44--48

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123869>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1895

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

pak bude dosti přesně

$$\frac{(r_3 r_2)}{(r_3 r_1)} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \frac{1 + \frac{\mu_1}{r_1^3}}{1 - \frac{\mu_2}{r_2^3}},$$

$$\frac{(r_2 r_1)}{(r_3 r_1)} = \frac{\Theta_3}{\Theta_2} \frac{1 + \frac{\mu_3}{r_3^3}}{1 - \frac{\mu_2}{r_2^3}}.$$
(14)

O grafickém řešení rovnic.

Podává

dr. V. Láska v Praze.

Buďtež dány rovnice

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Násobme je jednotkami

$$i_1 = +1 \quad i_2 = \sqrt{-1}$$

a sečtěme; pak bude

$$\begin{aligned} A &= a_1 i_1 + a_2 i_2, \\ B &= b_1 i_1 + b_2 i_2, \\ \gamma &= c_1 i_1 + c_2 i_2 \end{aligned}$$

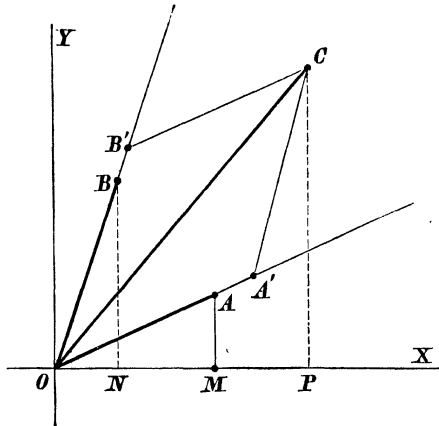
a dále

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha, \\ By &= \beta, \end{aligned}$$

při čemž jest zároveň

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Jsou však α, β, γ stejně jako A a B v geometrickém znázornění přímkou, pro jichž sečítání platí princip uzavřených polygonův.



Obr. 1.

Máme tudíž následující konstrukci. Budiž $OY \perp OX$ (obr. 1.)

a dále

$$\begin{array}{lll} OM = a_1 & ON = b_1 & OP = c_1 \\ MA = a_2 & NB = b_2 & PC = c_2. \end{array}$$

Budiž dále

$$B'C \parallel OA, \quad A'C \parallel OB;$$

pak bude

$$OB' + OA' = OC$$

a tedy

$$OB' = OB \cdot \frac{OB'}{OB} = OB \cdot y = \beta,$$

$$OA' = OA \cdot \frac{OA'}{OA} = OA \cdot x = \alpha.$$

Máme tudíž

$$x = \frac{OA'}{OA}, \quad y = \frac{OB'}{OB}.$$

Grafická metoda vede přímo k redukovaným rovnicím.

Budtež

$$\varphi_A \quad \varphi_B \quad \varphi_C$$

úhly směrů OA , OB , OC , pak máme

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{a_2}{a_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{b_2}{b_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_C = \frac{c_2}{c_1};$$

dále bude

$$OA = \frac{a_1}{\cos \varphi_A}, \quad OB = \frac{b_1}{\cos \varphi_B}, \quad OC = \frac{c_1}{\cos \varphi_C},$$

pak máme v trojúhelníku $OB'C$

$$\begin{aligned} \frac{yb_1}{\cos \varphi_B} \sin(\varphi_B - \varphi_C) - \frac{xa_1}{\cos \varphi_A} \sin(\varphi_C - \varphi_A) &= 0, \\ \frac{yb_1}{\cos \varphi_B} \cos(\varphi_B - \varphi_C) + \frac{xa_1}{\cos \varphi_A} \cos(\varphi_C - \varphi_A) &= \frac{c_1}{\cos \varphi_C}, \end{aligned}$$

ale to jsou již rovnice redukované. Z nich obdržíme dále

$$\begin{aligned} \frac{yb_1}{\cos \varphi_B} \sin(\varphi_B - \varphi_A) &= \frac{c_1}{\cos \varphi_C} \sin(\varphi_C - \varphi_A) \\ \frac{xa_1}{\cos \varphi_A} \sin(\varphi_B - \varphi_A) &= \frac{c_1}{\cos \varphi_C} \sin(\varphi_B - \varphi_C). \end{aligned}$$

Sečteme-li a položíme-li

$$yb_1 + xa_1 = c_1,$$

pak obdržíme známou stejninu

$$\begin{aligned} \cos \varphi_C \sin(\varphi_A - \varphi_B) + \cos \varphi_B \sin(\varphi_A - \varphi_C) \\ + \cos \varphi_A \sin(\varphi_B - \varphi_C) = 0, \end{aligned}$$

jakožto kontrolu správnosti posledních rovnic a výpočtů. Takováto kontrola jest pro praktický výpočet velice cenná. Podobně řešíme i rovnice o několika neznámých.

Dejme tomu, že máme

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Násobíme-li je jednotkami

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3,$$

obdržíme

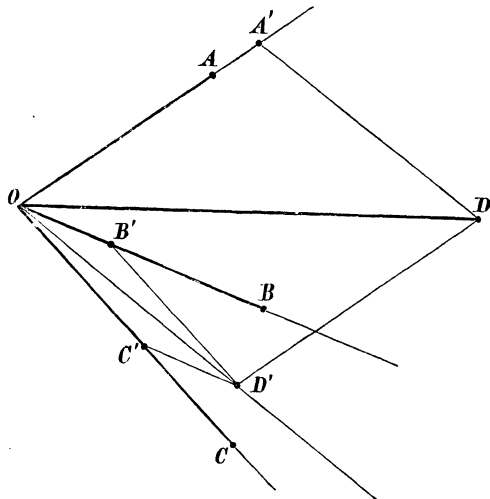
$$\begin{aligned} OA &= a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \\ OB &= b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 \\ OC &= c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 \\ OD &= d_1 i_1 + d_2 i_2 + d_3 i_3. \end{aligned}$$

Sestrojení pak jednotlivých neznámých dle rovnic

$$x = \frac{OA'}{OA}, \quad y = \frac{OB'}{OB}, \quad z = \frac{OC'}{OC}$$

provedeme nejlépe takto:

Položme směry $\{OA$ a OD rovinu (obr. 2.), kteráž rovinu danou směry OB a OC , protne v přímce OD' .



Obr. 2.

Učiníme dále $DA' \parallel OD'$, $OD' \parallel DA'$ v rovině první a potom $B'D' \parallel OC$, $D'C' \parallel OB$ v rovině druhé, tím obdržíme body A' , B' , C' . Geometrické konstruktivní řešení redukováno tím na jednoduchý problém deskriptivní geometrie.

Analytické řešení vede k podobným rovnicím jako u dvou neznámých.

Rovina první má rovnici

$$\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta = 0, \quad (1)$$

kdež $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ určíme z podmínky, že má procházeti body A a D, tak že bude

$$\begin{aligned}\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 &= 0, \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 &= 0.\end{aligned}$$

Rovina druhá má pak rovnici

$$\mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta = 0, \quad (2)$$

kdež opět

$$\begin{aligned}\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 &= 0, \\ \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \mu_3 c_3 &= 0.\end{aligned}$$

Rovnice (1) a (2) dávají pak rovnici přímky OD'.

Položíme-li pak

$$\begin{aligned}\sphericalangle DOA &= \varphi_A & D'OB &= \varphi_B, \\ \sphericalangle DOD' &= \varphi_D & D'OC &= \varphi_C,\end{aligned}$$

bude

$$\begin{aligned}OD &= OA' \cos \varphi_A + OD' \cos \varphi_D, \\ O &= OA' \sin \varphi_A - OD' \sin \varphi_D,\end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}OD' &= OB' \cos \varphi_B + OC' \cos \varphi_C, \\ O &= OB' \sin \varphi_B - OC' \sin \varphi_C.\end{aligned} \quad (4)$$

Prvá soustava dává OA' a OD', druhá pak OB' a OC'; posléze jest

$$x = \frac{OA'}{OA}, \quad y = \frac{OB'}{OB}, \quad z = \frac{OC'}{OC}.$$

Velice zajímavé jest řešení rovnic o čtyřech a n neznámých, které lze redukovati na tři po případě $n-1$ soustav tvaru (3) a (4). Pochod jest týž jako u rovnic o třech neznámých.

