Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 5, 529--554

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123824

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3.

Napsal dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

(Dokončení.)

Charakteristikou kollineace $\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0$ sluje souhrn stupňů všech elementárních divisorů formy $\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k$, totiž

$$[(e_1, e'_1, \ldots e_1^{h_1-1}) \, (e_2, e'_2, \ldots e_2^{h_2-1}) \ldots (e_s, e'_s \ldots e_s^{h_s-1})],$$

kde jsou e v každé závorce uspořádány sestupně. Čísla p. skupiny týkají se p. dělitele $(\varrho - \varrho_p)$; tento jest obsažen v determinantu $\Delta(\varrho)$ v mocnině exponentu

$$e_p + e'_p + e''_p + \ldots + e_p^{h_p-1},$$

v každém jeho subdeterminantu stupně n. v mocnině exponentu

$$e'_p + e''_p + \ldots + e_p^{h_p-1},$$

atd., konečně ve všech subdeterminantech stupně $(n - h_p + 2)$. v mocnině $e_p^{h_p-1}$. Každé skupině hořejší charakteristiky přísluší tedy základní prostor (bodový i rovinový) rozměru $h_k - 1$.

I dělí Segre kollineace ve třídy (t. j. naše typy) dle rozmanitých způsobů roztřídění elementárních dělitelů, takže do téže třídy čítá kollineace s touže charakteristikou, t. j. s týmž roztříděním samodružných bodů (a rovin). Aby však dvě kollineace byly projektivně identické, jest vedle příslušnosti do téže třídy ještě nutno (a stačí), aby kořeny ϱ_k byly v obou determinantech v témž pořádku sobě úměrny čili aby obě kollineace měly tytéž hodnoty korrespondujících absolutních invariantů.

Segre podal v uvedeném pojednání (a v následujícím) [24]) také celou řadu vět o kollineaci prostorů soumístných, zvl. o základních prostorech, takže možno každou kollineaci na základě toho dle její charakteristiky popsati. Uvádíme z vět nejdůležitější.

---

[24]) Segre, Sugli spazî fondamentali di un' omografia, Rend. Acc. Lincei (4) 2., 1886$_1$, pp. 325—327.

Každá kollineace je sama k sobě duální. Základní bodové prostory kollineace jsou nezávislé. Každému S_h jdoucímu skrze základní prostor S_{h-1} korresponduje S_h' perspektivní a střed perspektivnosti leží na nosiči zákl. prostoru rovin, konjugovaného k S_{h-1}; střed tento a prostor S_h opisují variety projektivní. Všechny zákl. prostory bodové jsou obsaženy v nosiči rovinového prostoru, konjugovaného k zákl. prostoru bodovému S_{h-1}, vyjma tento S_{h-1}, jenž tam může býti obsažen nebo není. Spojnice dvou bodů v dané kollineaci sobě korrespondujících protíná nosiče všech rovinových prostorů zákl., konjugovaných k jednotlivým bodovým prostorům základním, v bodech, které spolu s oněmi dvěma stanoví abs. invarianty kollineace (a duálně). Kollineace v S_n s charakteristikou

$$[(e_1, e_1', \dots e_1^{h_1-1})\ (e_2, e_2', \dots e_2^{h_2-1}) \dots$$
$$(e_k, e_k' \dots e_k^{h_k-1}) \dots (e_s, e_s', \dots e_s^{h_s-1})]$$

určuje na nosiči základního prostoru rovinového, konjugovaného k zákl. prostoru bodovému k. skupiny v této charakteristice, v případě, že při známé podmínce

$$e_k \geqq e_k' \geqq \dots \geqq e_k^{h_k-1} \quad \text{platí} \quad e_k^{l-1} > 1,\ e_k^l = 1,$$

kollineace s charakteristikou

$$[(e_1, e_1', \dots e_1^{h_1-1})\ (e_2, e_2' \dots e_2^{h_2-1}) \dots$$
$$(e_k - 1, e_k' - 1, \dots e_k^{l-1} - 1) \dots (e_s, e_s', \dots e_s^{h_s-1})]$$

a týmiž abs. invarianty jako má sama; v případě však, že $e_k = 1$, odpadne v charakteristice její k. skupina a kollineace ta má o jeden invariant méně.

Poslední věta slouží k redukci klassifikace kollineací na klassifikaci v prostoru méněrozměrném, vyjímaje případ, kdy charakteristika dané kollineace obsahuje vesměs 1; taková kollineace („obecná") jest však nejjednodušší.

Některé typy kollineací, a to obecné s dvěma pouze prostory základními studoval už *Veronese*[25]) (kollineace charakteristik [(11 . . 1) (11 . . 1)], kde počet jedniček v prvních závorkách je h_1, v druhých h_2 a platí $h_1 + h_2 = n + 1$).

[25]) J. Veronese, Interprétations géométriques de la théorie des substitutions des n lettres etc., Annali di matem. (2) 11. pp. 93—236.

Klassifikace kollineací prostorů S_n a S'_n soumístných jeví se v podstatě identickou s klassifikací dvojic ploch 2. stupně v S_n (kollineaci lze totiž pokládati za produkt polarit vzhledem k oběma plochám).

Svoji klassifikaci kollineací nedegenerovaných applikuje potom Segre na S_2 a S_3 [22]), podávaje spolu popis jednotlivých typů.

Jako příklad applikace theorie elementárních dělitelů vyložil v podstatě dle Segrea klassifikaci kollineací v S_n *Muth* [26]).

Kollineacemi v S_n a spec. jich klassifikací zabýval se později *Predella* [27]); kdežto výklad a důkazy Segreovy jsou algebraické, jsou úvahy Predellovy v hlavních a nejrozsáhlejších částech geometrické.

V prvním pojednání Predella, dokázav několik důležitých vět (nalezených Segrem) o základních prostorech kollineace nedegenerované kratčeji než Segre, a to pomocí jisté degenerované kollineace, podává k nim ještě dva důkazy geometrické. Pokládá totiž poprvé velmi vhodně dva kollineární prostory soumístné za dva perspektivní prostory původně různé a obsažené ovšem ve vyšším prostoru, jež splynuly; podruhé užívá pomocného prostoru téže dimense tak, že jeden prostor daný plyne z druhého dvěma projekcemi a dvěma řezy.

V dalším ukazuje algebraickým rozborem, že základní prostor násobný možno pokládati za limitu několika základních prostorů jednoduchých; i stačí tedy bráti v úvahu kollineace s prostory jednoduchými čili obecné, z kterých po případě mezní volbou koefficientů (při algebraickém vyjádření) resp. mezní volbou polohy základních prostorů vycházejí kollineace partikulární.

Klassifikuje potom kollineace v třídy a podtřídy: do téže třídy klade kollineace s týmž počtem prostorů základních, jež mají resp. (u každé z těchto kollineací) tytéž rozměry, ať jinak prostory ty jsou reální nebo imaginární, různé nebo

---

[26]) Muth, Theorie und Anwendung der Elementartheiler, Leipzig 1899. pp. 198—223.

[27]) P. Predella, Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Annali di matem. (2) 17. 1889. pp. 113—159. — Sulla teoria generale delle omografie, Atti Acc. Torino 27. 1891—2 pp. 270—288.

po skupinách splývající (tyto třebas i singulární); mají také týž počet absolutních invariantů (ovšem třeba také sobě rovných nebo $= 1$ nebo $= 0$). Jsou-li i hodnoty korrespondujících abs. invariantů stejné, patří takové kollineace do téže podtřídy. Označuje pak jako charakteristickou skupinu základního prostoru násobného řadu čísel udávajících rozměry splývajících zde jednoduchých prostorů základních; na př. jestliže splynuly prostory základní $S_{h_1-1}, S_{h_2-1}, \dots S_{h_p-1}$, je char. skupinou násobného prostoru tak vzniklého $(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots h_p - 1)$. Souhrn pak char. skupin všech prostorů základních nazývá charakteristikou kollineace. Význam tohoto roztřídění objasňuje věta, že dvě kollineace příslušné do téže podtřídy jsou projektivní, t. j. jedna plyne z druhé konečným počtem projekcí a řezů.

Další úvaha jedná o struktuře základních prostorů násobných. Budiž uvedena pouze jedna speciální věta: V kollineaci s jediným bodem samodružným $(n + 1)$-násobným a_0 existuje jediná samodružná přímka a_1 jdoucí skrze a_0 (limita všech přímek spojujících po dvou $n + 1$ bodů samodružných nekonečně blízkých), jediný samodružný prostor dvourozměrný a_2, jdoucí skrze a_1 atd., konečně jediný samodružný prostor $(n - 1)$-rozměrný, obsahující předchozí.

Bylo uvedeno, že dvě kollineace příslušné do téže podtřídy jsou projektivně identické; jednu dvojici této projektivnosti můžeme zvoliti libovolně. Řešení otázky, jak nalézti dalších $n + 1$ dvojic transformace vede jednak k jednoduché konstrukci jakékoli kollineace, jednak ke kanonickému tvaru relací stanovících kollineaci. Pro S_3 rovnice ty uvedeny.

S jiného stanoviska podal rozbor kollineací zvl. partikulárních Predella v druhém článku cit., neužívaje úvah limitních. Charakteristiku partikulární kollineace odvozuje tímto novým způsobem:

Buďtež $F(h'_1 - 1), F(h''_1 - 1), \dots F(h_1^{(\sigma)} - 1)$ základní prostory kollineace partikulární (t. j. $\sum_k h^{(k)} < n + 1$, kdežto u obecných $\Sigma h = n + 1$), i obsahují tedy některé tu uvedené prostory jiné s nimi splynuvší; $G(n - h'_1)$ budiž nosič zákl. prostoru rovinového, konjugovaného k $F(h'_1 - 1)$. Dejme tomu, že $F(h'_1 - 1)$ protne $G(n - h'_1)$ v $F(h'_2 - 1)$; pak jest v $G(n - h'_1)$ kollineace podřazená se zákl. prostory $F(h'_2 - 1)$, $F(h''_1 - 1), \dots F(h_1^{(\sigma)} - 1)$, v ní jest nosičem prostoru k $F(h'_2 - 1)$ konjugovaného prostor $G(n - h'_1 - h'_2)$. Protne-li $F(h'_2 - 1)$ tento prostor $G(n - h'_1 - h'_2)$ v $F(h'_3 - 1)$, máme zase v $G(n - h'_1 - h'_2)$ podřazenou kollineaci s prostory základními $F(h'_3 - 1)$, $F(h''_1 - 1), \dots F(h_1^{(\sigma)} - 1)$ atd. Takto pokračujíce dospějeme k zákl. prostoru $F(h'_{p'} - 1)$, jenž neprotíná nosič svého prostoru konjugovaného; při tom $h'_1 \geq h'_2 \geq \dots \geq h'_{p'}$. Podobně nalezneme v $F(h''_1 - 1)$ prostory $F(h''_2 - 1)$, $F(h''_3 - 1), \dots F(h''_{p''} - 1)$ atd. Charakteristikou takové kollineace jest potom

$$[(h'_1 - 1, h'_2 - 1, \dots h'_{p'} - 1)(h''_1 - 1, h''_2 - 1, \dots h''_{p''} - 1) \\ \dots (h_1^{(\sigma)} - 1, h_2^{(\sigma)} - 1, \dots h_{p(\sigma)}^{(\sigma)} - 1)].$$

Kdežto kollineace obecného typu jest úplně stanovena základními prostory a abs. invarianty, nestačí tyto při kollineaci partikulární. Každá kollineace jest ovšem určena $n + 2$ nezávislými dvojicemi korrespondujících bodů, nelze však odtud souditi na typus. I nahrazuje Predella $n + 2$ tyto dvojice soustavou $n + 1$ dvojic charakteristických, jež spolu s abs. invarianty určují kollineaci; charakt. dvojice redukují se u kollineace obecné na samodružné body, abs. invarianty jako doplněk žádané nahrazují $(n + 2)$. dvojici z oněch libovolně volených.

Naznačíme, jak voliti uvedené dvojice charakteristické. Je-li $F(h'_1 - 1)$ zákl. prostor na př. čtyřnásobný, budiž jeho charakteristickou skupinou $(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1, \delta - 1)$ (kde tedy $\alpha = h'_1$, $\beta = h'_2$ atd.); v kollineaci dané v S_n jest $F(\alpha - 1)$ zákl. prostorem, jenž protíná dle předchozího $G(n - \alpha)$ v $F(\beta - 1)$, v kollineaci podřazené v $G(n - \alpha)$ jest $F(\beta - 1)$ zákl. prostor protínající $G(n - \alpha - \beta)$ v $F(\gamma - 1)$ atd., konečně v kollineaci obsažené v $G(n - \alpha - \beta - \gamma)$ jest $F(\delta - 1)$ zákl. prostor neprotínající nosič $G(n - \alpha - \beta - \gamma - \delta)$ svého prostoru konjugovaného. V prostoru $F(\alpha - 1)$ zvolme α nezávislých bodů $A_1, \dots A_\delta \dots A_\gamma \dots A_\beta \dots A_\alpha$, z nich prvních δ v $F(\delta - 1)$, prvních γ v $F(\gamma - 1)$, prvních β v $F(\beta - 1)$. V kollineaci obsažené v $G(n - \alpha - \beta)$ jsou body $A_1 \dots A_\delta$ body nosiče $G(n - \alpha - \beta - \gamma)$ prostoru konjugovaného k $F(\gamma - 1)$ a proto (dle věty Segreovy) středy perspektivnosti δ dvojic korrespondujících prostorů $S(\gamma)$ a $S'(\gamma)$, jdoucích skrze $F(\gamma - 1)$; v každé takové dvojici prostorů zvolme dvojici koresp. bodů $(B_1 B'_1), \ldots (B_\delta B'_\delta)$, ovšem $B_1 B'_1$ leží v přímce s bodem $A_1, \ldots$ body B_δ, B'_δ konečně v přímce s bodem A_δ. Dále v kollineaci obsažené v $G(n - \alpha)$ jsou body $B_1 \ldots B_\delta A_{\delta+1} \ldots A_\gamma$ body nosiče $G(n - \alpha - \beta)$ prostoru konjugovaného k $F(\beta - 1)$ a proto středy perspektivnosti γ dvojic koresp. prostorů $S(\beta)$ a $S'(\beta)$ jdoucích skrze $F(\beta - 1)$; v každé této dvojici prostorů zvolme dvojici koresp. bodů $(C_1 C'_1) \ldots (C_\delta C'_\delta)(B_{\delta+1} B'_{\delta+1}) \ldots (B_\gamma B'_\gamma)$, z nichž $C_1 C'_1$ leží v přímce s bodem $B_1, \ldots C_\delta C'_\delta$ v přímce s B_δ, $B_{\delta+1} B'_{\delta+1}$ v přímce s $A_{\delta+1}, \ldots B_\gamma B'_\gamma$ s bodem A_γ. Konečně v kollineaci dané v S_n jsou body $C_1 \ldots C_\delta B_{\delta+1} \ldots B_\gamma A_{\gamma+1} \ldots A_\beta$ body nosiče $G(n - \alpha)$ a tedy středy perspektivnosti β dvojic koresp. prostorů $S(\alpha)$, $S'(\alpha)$, jdoucích skrze $F(\alpha - 1)$; i zvolíme v těchto koresp. body

$$(D_1 D'_1) \ldots (D_\delta D'_\delta)(C_{\delta+1} C'_{\delta+1}) \ldots (C_\gamma C'_\gamma)(B_{\gamma+1} B'_{\gamma+1}) \ldots (B_\beta B'_\beta),$$

obdobné vlastnosti jako prve. Body $A_1, \ldots A_\alpha$, $B_1 \ldots B_\beta$, $C_1, \ldots C_\gamma$, $D_1, \ldots D_\delta$ určují prostor $S(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 1)$, jenž obsahuje také body $B'_1 \ldots B'_\beta$, $C'_1 \ldots C'_\gamma$, $D'_1 \ldots D'_\delta$ a je samodružný prostor kollineace (t. zv. prostor charakteristický příslušný k zákl. prostoru $F(\alpha - 1)$); $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ dvojic bodů $(A_1 A_1)$, $(A_2 A_2), \ldots (A_\alpha A_\alpha)$, $(B_1 B'_1)$, $(B_2 B'_2), \ldots (B_\beta B'_\beta)$, $(C_1 C'_1) \ldots (C_\gamma C'_\gamma)$, $(D_1 D'_1) \ldots (D_\delta D'_\delta)$ nazývá Predella dvojicemi charakteristickými. V $G(n - \alpha - \beta - \gamma - \delta)$ opakujme předešlý rozbor s prostorem $F(h''_1 - 1)$ atd., i nalezneme σ prostorů charakteristických a v nich všech $n + 1$ char. dvojic korrespondujících bodů.

Volbou charakteristických dvojic bodových umožněna také jednoduchá konstrukce bodů korrespondujících daným; při kollineacích obecných jest ovšem konstrukce ještě jednodušší, obě udává Predella na uv. místě. S Predellovým stanovením kollineace partikulární pomocí dvojic char. souvisí, jak patrno, naše konstrukce kollineací těch z partikulárních homologií.

Symbol kollineace Segreův (charakteristiku) převedeme na symbol Predellův, když každou skupinu $(e, e', e'', \ldots e^{m-1})$ symbolu onoho, příslušnou k některému elem. děliteli, nahradíme char. skupinou $(h_1 - 1, h_2 - 1, h_3 - 1, \ldots h_p - 1)$, kde h_1

je počet všech čísel $e^{(i)}$, h_2 počet ten zmenšený o počet $e^{(i)}$ rovných 1, h_3 počet všech $e^{(i)}$, zmenšený o počet jich rovných 1 a 2, atd., konečně h_p jest počet všech čísel $e^{(i)}$ rovných p. Naopak h_p čísel $e^{(i)}$ rovná se p, $h_{p-1} - h_p$ rovná se $p - 1$, $h_{p-2} - h_{p-1}$ jest rovných $p - 2, \ldots$ konečně $h_1 - h_2$ jest čísel $e^{(i)}$ rovných 1 [28]).

V úvahách týkajících se větším dílem korrelací vyložil *Medici* [29]), vyšed od výsledků Predellových, rozklad kollineace v elementární kollineace, čímž vysvítá geometrický význam elementárních dělitelů. Nazývá totiž Medici kollineaci složenou, možno-li nalézti dva nebo několik nezávislých prostorů S_{l_1-1}, $S_{l_2-1}, \ldots S_{l_m-1}$ ($m \geqq 2$) v daném S_n, při nichž jednak platí $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = n + 1$ a z nichž za druhé každý je invariantní jako celek při dané kollineaci; jinak je kollineace elementární. Nutnou a dostatečnou podmínkou, by nesingulární kollineace v S_n byla elementární, jest, aby měla charakteristiku $[(00\ldots0)]$ s $n+1$ nulami (dle označení Predellova) nebo symbol Segreův $[n+1]$; kollineace složená redukuje se na tolik elementárních, kolik je elementárních dělitelů v Segreově symbolu kollineace, děliteli stupně q korresponduje elementární kollineace v S_{q-1}.

B) Kontinuitní grupy kollineací v S_3.

36. Theorie kontinuitních grup je dílem Lieovým. Speciální otázku grup projektivních řešil Lie podrobně pro S_1 a S_2 v podstatě a v četných podrobnostech i pro S_3. Také o grupách kollineací v S_n podal Lie sám a jeho škola mnohé důležité a zajímavé věty. Všechny tyto práce založeny jsou na pojmu infinitesimální transformace. Celý postup vyšetřování, pomůcky i formulace výsledků jsou analytické, třebas mnohé bylo geometricky koncipováno. Zcela jiného rázu jsou příspěvky, které

---

[28]) Theorii kollineací v soumístných prostorech n-rozměrných pěkně podává dle pův. prací uvedených (více dle Predelly) E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Pisa 1907 pp. 63—100.

[29]) S. Medici, Sulle omografie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Giornale di matem. 44. 1906 pp. 189—239.

k theorii projektivních grup podal Newson; elementární úvahy geometrické a analytické vedly jej pro S_1 a S_2 k týmž výsledkům, kterých došel Lie. Dedukce Lieovy souvisí na mnohých místech s celou budovou jeho originální theorie, takže není možno podati v krátkosti uzavřený referát o jeho stanovení kontinuitních grup kollineačních; bude naznačen pouze postup jeho, aby vysvitla povaha vyšetřování. Methodu prací Newsonových lze vyložiti zcela stručně.

Grupy proj. transformací jednorozměrné variety S_1 určil Lie v hlavním svém díle[30]) pomocí t. zv. grupy adjungované k tříparametrové grupě transformací těch. „Obecná proj. grupa" variety S_1 má totiž 3 nezávislé infinitesimální transformace p, xp, x^2p $\left(\text{kde } p = \frac{df}{dx}\right)$; i jest obecná infinit. transformace dána výrazem $(e_1 + e_2x + e_3x^2) \cdot p$. Koefficienty e_k lze interpretovati jako hom. souřadnice bodové na rovině ε, každá infinit. transformace obecné proj. grupy je pak znázorněna bodem této roviny a naopak; i hledá Lie všechny nejmenší invariantní variety obsažené v ε, t. j. všechny inv. variety, jichž body transformují se při adjungované grupě tak, že každý bod na takové varietě obecně položený přechází ve všechny ostatní body takové. Každá nejmenší invar. varieta v ε představuje typus infinitesimálních transformací; existují dva typy, každá jednopar. subgrupa 1. typu je znázorněna bodem roviny ε ležícím mimo jistou kuželosečku, subgrupa 2. typu bodem této kuželosečky. Dvouparametrových subgrup nalézá v dalším pouze jeden typus, znázorněný tečnou k zmíněné kuželosečce. Volí potom jednoduché representanty nalezených subgrup a charakterisuje je invariantními elementy v S_1. Elementárnější určení všech typů projektivních grup v S_1 podal Lie na jiném místě[31]).

Newson vyšetřil[32]) projektivní transformace v S_1 a jich grupy, vycházeje od konstrukce projektivního vztahu dvou řad bodových pomocí tečen kuželosečky, jež dotýká se jejich os; stotožněním obou os docíleno proj. transformace bodové řady.

---

[30]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III. pp. 12—17.

[31]) Lie-Scheffers, Continuierliche Gruppen pp. 115—130.

[32]) Newson, Continuous groups of projective transformations treated synthetically, Kansas Univ. Quarterly 4. pp. 71—92, 1895

Tímto názorným způsobem odvozuje vlastnosti proj. transformací (dva typy), jich speciální případy (transformace inversní, pseudotransformace čili degenerované, involutorní, infinitesimální) a grupy; důkaz neexistence grup dalších neposkytuje obtíží. V druhém pojednání[33]) o témž předmětě jest methoda převahou analytická, také však elementární.

Subgrupy obecné proj. grupy g_8 roviny (dvourozměrné variety S_2) určil a klassifikoval Lie[34]) tímto způsobem: Určuje nejprve na základě věty, že při infinit. proj. transformaci roviny musí aspoň jeden bod a incidentní přímka býti invariantní, rozmanité typy infinit. transformací čili typy jednoparametrových proj. grup; volí pro zmíněné invar. elementy polohu, kterou se analytický výraz obecné infinit. transformace co nejvíce zjednodušuje, činí potom všechny možné hypothesy o hodnotě konstant ve výrazu tom a převádí tyto zvláštní výrazy proj. transformacemi na tvar nejjednodušší, po případě je zamítá jako (projektivně) ekvivalentní k dříve nalezeným. Potom určuje na základě předešlých výsledků všechny křivky v rovině, jež připouštějí jednu nebo několik infinit. proj. transformací; nalézá křivky $y = x^c$ a $y = e^x$ (s jednou), spec. přímku (se 6) a (nedegener.) kuželosečku (se 3 nezávislými infinit. transformacemi). — Východiskem soustavného stanovení subgrup v g_8 činí nejjednodušší a nejdůležitější infinit. proj. transformaci, totiž infinit. translaci; ke každé infinit. proj. transformaci, jež je ekvivalentní inf. translaci, patří určitý „linienelement“, t. j. bod s incidentní přímkou a naopak, těchto infinit. transformací je tedy ∞^3. I nalézá, že každá proj. grupa roviny s n ($n \geq 5$) parametry obsahuje aspoň jednu inf. transformaci ekvivalentní inf. translaci; může jich tedy taková grupa obsahovati konečný počet nebo také ∞^1 nebo ∞^2 (∞^3 inf. translací obsahuje pouze g_8). Bera na tomto základě v úvahu útvary vytvořené body s incid. přímkami při transformacích grup g_n ($n \geq 5$) a útvary, jež dle vět dříve odvozených jsou invariantní při nižších grupách, dochází k výsledku, že

[33]) Newson, Projective transformations in one dimension and their continuous groups Kansas Univ. Bulletin 1. (1902) pp. 115—129. Italský překlad od C. Alasie, Giornale di matem. 43. 1905.

[34]) Lie-Engel, Th. der Transformationsgruppen III. pp. 78—109 v podstatě už v Norw. Archiv for Math. 10. (1884).

každá subgrupa má invar. buď bod nebo přímku (nehledě k tříparam. grupě nedegener. kuželosečky); subgrupa o 7 parametrech neexistuje. Rozvrh dalšího postupu je tím dán. Určují se nejprve proj. grupy, při nichž je invar. přímka, ale nikoli incid. bod, odtud plynou duální grupy s invar. bodem bez incid. přímky; potom grupy s invariantní přímkou a incidentním bodem. Subgrupy grupy g_5, při níž je invar. bod s incid. přímkou, transformují svazek přímek s bodem tím jako středem buď tak, že všechny paprsky jsou jednotlivě invariantní nebo existuje ve svazku tom jednoparam. nebo dvouparam. grupa jednorozměrných transformací. Počtářská praxe je táž, jak uvedeno při stanovení jednoparametrových subgrup. Mezi nalezenými grupami zbývá vyšetřiti ty, jež jsou v g_8 spolu ekvivalentní, z takových zvoliti pouze jednu grupu a ostatní vymýtiti, potom vyhledati grupy soběduální nebo spojiti duální v dvojice. V tabulce uvádí pak Lie jako výtěžek rozboru 26 typů grup v S_2 (vedle toho 9 duálních).

Lie užil ještě jiné methody[35]) k stanovení typů proj. grup roviny. Používá totiž tabulky všech konečných kontinuitních grup bodových transformací v rovině, dříve nalezené; proj. grupy jsou ty z nich, při kterých je invariantní obyčejná differenciální rovnice 2. řádu $y'' = 0$. Hledá tedy mezi kontin. grupami bodových transformací ony, při kterých je invar. aspoň jedna obyč. diff. rovnice 2. řádu, určuje pak všechny při takové grupě invar. diff. rovnice 2. řádu a pro každou z nich stanoví bodovou transformaci roviny, která ji převádí v $y'' = 0$. I přechází těmito transformacemi bodovými ona grupa v proj. grupy; vyjdou tak všechny typy proj. grup v S_2.

Typy subgrup „obecné proj. grupy" g_8 v rovině stanoveny Liem také při elementárním výkladu některých jeho theorií[36]); určování grup s invariantní přímkou založeno zde na tabulce (dříve nalezené) subgrup „homogenní lineární grupy" dvou proměnných. Připojeny na základě tohoto rozboru k typům prve

---

[35]) Krátce ji vykládá v Th. d. Transformationsgruppen III. p. 80—81. Ustanovil touto methodou typy více než dvoupar. grup v Norw. Archiv 10. (1884).

[36]) Lie-Scheffers, Cont. Gruppen pp. 261—291.

uvedeným 4 nové (a 2 duální), jež třebas plynou z oněch specialisací konstant, vykazují jinou typickou povahu. Celkem obsahuje tato Lieova tabulka 30 typů projektivních grup (a 11 duálních) v S_2.

V Lieově seznamu typů projektivních grup v S_2 jest každá grupa charakterisována symboly infinitesimálních transformací, jež ji vytvořují. Konečné vzorce transformační pro tyto typy uveřejnil F. Meyer[37]; „integroval", jak uvádí, infinit. transformace Lieovy z části přímo, z části geometrickými úvahami. Vzorce ty mají jistý kanonický tvar v tom smyslu, že invar. přímka položena do nekonečna a pod. Jednotlivé grupy charakterisuje v druhé tabulce geometricky útvary při nich invariantními, po případě ještě počtem parametrů, uváděje mimo to, kde potřeba, subgrupu; konečně připojeny charakteristické diff. rovnice, invariantní výhradně při jednotlivých typech proj. grup.

Newson[38]) odvodil kontinuitní grupy kollineací v rovině podle pěti typů kollineací těch. Nejprve vyšetřuje transformace perspektivní a elace; o nich pojednal podrobně také A. Emch[39]). Grupy kollineací typu 1. rozděluje Newson ve tři třídy: grupy 1. třídy sestrojuje z dvouparametrových grup invariantního trojúhelníka, grupy třídy druhé charakterisovány jsou konstantou r (ve vztahu mezi parametry kollineace $k_2 = k_1^r$), grupy 3. třídy skládají se z grup o 1 parametru, při nichž jest invariantní kuželosečka. První dvě třídy rozlišuje také u grup kollineací typu 2. Konečně nalézá tři grupy kollineací 3. typu. V dalším připojuje symbolické vzorce, udávající strukturu nalezených grup, totiž jakost i počet subgrup obsažených v jednotlivých grupách. Zajímavé jsou úvahy o transformacích singulárních; tak totiž nazývá Newson diskretní systémy kollineací obsažené v grupách kollineací jiného typu; transformacemi takovými zabývalo se několik mathematiků amerických. Mimo rámec hlavních úvah

---

[37]) F. Meyer, Tabellen von endlichen continuirlichen Transformationsgruppen, Mathematical Papers read at the international math. congress Chicago 1893, New. York 1896, pp. 187—194.

[38]) H. B. Newson, A new theory of collineations and their Lie groups American Journal of math. 24., 1902, pp. 109—172.

[39]) A. Emch, Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically. Kansas Univ. Quarterly 5. 1896 pp. 1—35. Emch zabývá se i metrickými specialisacemi uv. grup; článek není bez omylů.

připadá dodatek o některých grupách nekontinuitních. Na konec připojena tabulka odvozených kont. grup kollineací s odkazy na tabulku Lieovu a Meyerovu; Newson obdržel o 2 grupy (a 2 duální) více než předešlí.

Methoda Newsonova má dvě hlavní přednosti, názornost a jednoduchost. Jádrem methody je roztřídění grup do skupin dle typů a konstrukce grup víceparametrových (které můžeme označiti jako širší) z grup („základních"), jež příslušejí invariantním útvarům jednotlivých typů kollineačních; s druhé strany rozklad těchto (pokud mají více než 1 parametr) v grupy charakterisované konstantou (nazveme je užšími) a obdobné sestrojení zase grup širších, které jsou zároveň užšími ke grupám dříve konstruovaným. Tím ovšem, že proti počtářské methodě Lieově opuštěna transformace infinitesimální jako prvek grup transformačních, nevystupuje tou měrou do popředí kontinuita grup; závažnější jest, že otázka úplnosti soustavy nalezených grup neřešena dosud uspokojivě. V provedení připouští Newsonovo určení grup v S_2 vhodnější úpravu; předně lze analytické pomůcky ve shodě s povahou předmětu téměř vyloučiti, celou úvahu pak učiniti soustavnější a tím kratší (soustavnost zaručí, že nebyla vynechána žádná supposice, duální grupy netřeba zvlášť odvozovati, stále se opakující závěry stačí jednou důkladněji podati a pod.).

Newsonova klassifikace kont. grup kollineačních v rovině učiněna (ve tvaru co nejstručnějším) východiskem pro přítomné stanovení grup v S_3.

37. Jako počet typů kollineací v prostoru trojrozměrném je značně větší než v S_2, tak vzrůstá i počet a rozmanitost kont. grup kollineačních.

Z projektivních grup v S_3 určuje Lie[40]) nejprve primitivní. Užívaje zde dříve nalezené tabulky všech primitivních grup (bodových transformací) v S_3 hledá, které z osmi grup tam uvedených jsou podobné grupě projektivních transformací. Poněvadž projektivní grupa jest tím charakterisována, že jest při ní invariantním systém ∞^4 přímek v S_3 čili soustava dvou

[40]) Lie-Engel, Transformationsgruppen III. pp. 224—258. Některé jednotlivosti uveřejnil Lie už 1884 v Norw. Archiv for Math. 10.

obyč. diff. rovnic 2. řádu $y'' = 0$, $z'' = 0$, musí při každé grupě jí podobné býti předně invariantní aspoň jeden systém diff. rovnic 2. řádu $y'' = \alpha(x, y, z, y', z')$, $z'' = \beta(x, y, z, y', z')$ a musí za druhé mezi takovými systémy býti aspoň jeden, který lze zavedením nových proměnných x, y, z uvésti na tvar $y'' = 0$, $z'' = 0$. Při grupě, o níž takto se zjistí, že jest projektivní grupě podobná, nutno pak ještě vyšetřiti, není-li podobná několika proj. grupám, jež spolu uvnitř obecné proj. grupy nejsou ekvivalentní. Přichází naznačeným postupem, opíraje se o předchozí určení všech křivek a ploch, připouštějících co nejvíce nezávislých infinit. proj. transformací, k výsledku, že v S_3 existuje 7 různých typů primitivních projektivních grup, jichž representanty jsou: 15parametrová obecná proj. grupa sama, 12parametrová obecná lineární grupa, 11param. spec. lin. grupa, 7param. grupa Euklidovských pohybů a podobnostních transformací, 6param. grupa pohybů Euklidovských, 6param. proj. grupa nedegenerované plochy 2. stupně, 10param. proj. grupa nedegenerovaného lineárního komplexu. Tyto grupy určuje potom ještě jinou methodou, vycházeje od největších subgrup, při nichž jest invariantní obecně položený bod.

Kdežto z primitivních grup při obecné projektivní grupě a 10param. proj. grupě lineárního komplexu není žádný bodový útvar invariantní, jest při každé imprimitivní grupě invariantním aspoň jeden bodový útvar buď plocha nebo křivka nebo bod. I dělí Lie imprimitivní grupy ve dvě třídy: v ty, při nichž je invariantní aspoň jeden bod nebo přímka nebo rovina, a v grupy s invar. plochou nebo křivkou. K druhé třídě nepatří žádná grupa s 1 nebo 2 parametry (při těch je totiž invariantní vždy aspoň jeden bod, incidentní přímka a incidentní rovina), z vyšších nalézá pouze 3parametrovou grupu prostorové křivky kubické. Zbývají imprimitivní grupy první třídy; jest jich hodně mnoho a k stanovení jich udává Lie dvě cesty, buď určiti nejprve grupy s invariantní rovinou (duální mají invar. bod) a potom grupy, při nichž je invariantní přímka, ale žádná rovina a žádný bod, nebo hledati napřed grupy s invar. přímkou (jsou buď soběduální nebo už po dvou duální) a potom grupy s invar. rovinou nebo bodem, při nichž není invar. žádná přímka. Obě methody vykládá dost obšírně, ale přece jen potud, co stačí k jich pochopení, neprováděje rozsáhlých rozborů a počtů do konce. Při první methodě jest tedy napřed ustanoviti grupy s invar. rovinou; položíme-li tuto do nekonečna, jest určiti vlastně subgrupy obecné lineární grupy. Základem toho činí Lie tabulku subgrup obecné homogenní lin. grupy tří proměnných; symboly infinitesimálních transformací těchto grup rozšiřuje o symbol infinit. translace a počet rozšířených infinit. transformací v každé grupě doplňuje přípustnými „volnými" translacemi. Počet takto naznačený provádí jenom ve dvou případech: nalézá grupy, při nichž je invar. rovina, ale žádná přímka (14 typů, bez primitivních jen 10 typů), potom grupy s invar. rovinou ale žádným invar. bodem (13, resp. 9 typů). Dualistickou transformací nalézá grupy s invariantním bodem a žádnou invar. rovinou (13 typů). Zbývalo by vyšetřiti, zda některé z nalezených grup nejsou spolu ekvivalentní uvnitř obecné projektivní grupy a podržeti z takových jen jeden typus (postupem uvedeným nalezeny totiž pouze grupy různé mezi sebou uvnitř obecné lin. grupy). Podobný je postup Lieův při druhé methodě; invariantní přímku činí osou svazku rovin $z = 0$, místo 11-parametrové grupy s invar. přímkou volí grupu stejné struktury v S_4, totiž grupu Euklidovských pohybů a podobnostních transformací v S_4 (grupu, při níž je invar. lineární S_3 v nekonečnu a v něm nedegenerovaná plocha 2. stupně). Jako prve subgrupy lin. hom. grupy činí teď základem (dříve nalezené) subgrupy jisté homogenní 7param. grupy, příslušné ke grupě plochy 2. st., jejichž symboly rozšiřuje a doplňuje volnými translacemi. Naznačiv takto celý postup, určuje potom fakticky pouze grupy s invar. přímkou a žádným invar. bodem a žádnou rovinou.

Ve třech krátkých článcích publikoval *Newson*[41]) počátek theorie grup prostorových; vyšetřuje tam u pěti prvních typů grupy, které jsme nazvali základními, jakož i jejich grupy užší; o methodě platí, co uvedeno při S_2, zjednodušení a homogenisace je zde tím více žádoucí.

---

[41]) Newson, On the groups and subgroups of real collineations leaving a tetrahedron invariant. A new theory of collineations in space. Kansas Univ. Quarterly 10. 1901. pp. 33—47, 87—106.

Geometrickými úvahami ustanovil *Enriques*[42]) dvouparametrové grupy obecných typů kollineací v S_3, i nalezl 5 grup typu [0000], 5 typu [100], 2 typu [11] a 1 typu [20].

38. Jest otázkou o sobě důležitou, které křivky, plochy a přímkové útvary jsou invariantní při kont. grupách kollineací v S_3. Vyšetřování toho druhu podali hlavně Lie, Enriques, Pittarelli, Fano, Amaldi.

Že Reyeův komplex jest v celku invariantní při grupě ∞^3 záměnných kollineací s inv. čtyrstěnem, učinil *Lie* východiskem svého vyšetřování[43]) komplexu toho[44]) a křivek i ploch jemu příslušných. O zvláštních křivkách a plochách tam přehlédnutých, jež jsou invariantní při grupě ∞^1, resp. ∞^2 kollineací v prostoru, jakož i o křivkách rovinných toho druhu (o t. zv. W-křivkách a W-plochách) pojednal krátce na to společně s F. Kleinem[45]); o rovinných křivkách W následovaly podrobnější úvahy[46]), obdobné pojednání o útvarech prostorových zůstalo nedokončeno[47]).

Křivky a plochy invariantní při více než ∞^2 transformacích určuje *Lie* ve stěžejním svém spise[48]). Z křivek probírá nejprve přímku, potom křivky rovinné, konečně křivky prostorové. Grupa, při níž jest invariantní rovinná křivka, musí býti patrně subgrupou 12param. grupy s invar. rovinou; s druhé strany zase její subgrupou musí býti 4param. grupa, při jejíž transformacích jsou všechny body křivky (a tedy všechny body její

---

[42]) F. Enriques, Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse. Atti Ist. Veneto (7) 4. 1892—3. pp. 1590—1635.

[43]) Lie, Über die Reciprocitätsverhältnisse des Reyeschen Complexes, Gött. Nachrichten 1870, pp. 53—66.

[44]) Viz také Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen; R. Sturm, Liniengeometrie I. pp. 333—382, zvl. p. 378 a n.

[45]) Klein-Lie, Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Comptes rendus Acad. Paris 1870. pp. 1222—1226, 1275—1279.

[46]) Klein-Lie, Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, Math. Annalen 4. 1871. pp. 50—84.

[47]) M. Noether, Sophus Lie, Math. Ann. 53. 1900. p. 7.

[48]) Lie-Engel, Transformationsgruppen III. pp. 180—198. Původně v Archiv for math. 7. (1882), kde přehlédnuta Cayleyova plocha přímková s grupou 3parametrovou (doplněna v Christiania Forhandl. 1884).

roviny) invar. Nalézá, že automorfní grupa křivky rovinné má buď 5 nebo 7 parametrů; v prvním případě existují dva typy křivek a grup (obě grupy mají však celou soustavu ∞^1 křivek invar.), v druhém jest to nejširší automorfní grupa kuželosečky. Kdežto rovinná křivka s body jednotlivě invariantními dovoluje 4param. zmíněnou grupu, nemůže prostorová křivka býti při kollineaci neidentické invariantní ve všech svých bodech; její nejširší grupa může býti pouze 3parametrová, transformující její body jako body variety jednorozměrné. Nalézá nejprve, že existuje-li prostorová křivka připouštějící 2 infinit. proj. transformace, jest to nutně racionální křivka 3. stupně; ta však, jak se dalším rozborem ukazuje, dovoluje právě 3 infinit. proj. transformace. Isolované křivky invariantní při proj. grupách a tím je definující jsou tedy pouze přímka, nedegenerovaná kuželosečka a prostorová kubika (grupy s 11, 7, 3 parametry). Křivky prostorové s jedinou infinitesimální proj. transformací nevyšetřuje; bylo by potřebí uvésti infinit. proj. transformace v S_3 na různé typy.

Dle podobného rozvrhu hledá potom plochy připouštějící aspoň 3 infinit. proj. transformace a grupy jimi definované. Jest to především rovina s 12param. grupou; úvahu o grupách s invar. plochou rozvinutelnou převádí dualistickou transformací na řešenou už otázku grup s invar. křivkou, jsou tu 2 typy 5param. grup s invar. kuželem (při těch je invar. celý svazek ∞^1 kuželů), 7param. grupa s invariantním nedegenerovaným kuželem 2. stupně a 3param. grupa s rozvinutelnou plochou prostorové křivky kubické. Plochy nerozvinutelné, invariantní při $r \geqq 3$ infinit. proj. transformacích hledá potom tím způsobem, že vyšetřuje jejich systémy asymptotických křivek, i nalézá pouze dvě plochy: nedegenerovanou plochu 2. stupně s 6param. grupou a Cayleyovu přímkovou plochu 3. stupně s 3param. grupou. Pro stanovení plochy připouštějící 2 infinit. proj. transformace udává stručně methodu, připomínaje výslovně pouze plochy příslušné k invariantnímu čtyrstěnu.

Jednu mezeru v uvedeném právě vyšetřování Lieově, totiž o křivkách s jednoparametrovou grupou kollineací, vyplnil *Pit-*

tarelli[49]. Vychází od Segreovy a Predellovy klassifikace kollineací v S_3, píše ke kanonickým transformačním rovnicím jednotlivých typů kanonické systémy differenciálních rovnic, definujících infinitesimální proj. transformaci, platné pro souřadnice bodu a podobně pro souř. roviny (a přímky), integruje je a nalézá takto křivky a rozvinutelné plochy, invariantní při jednoparametrových grupách kollineací každého typu. Vyšetřuje potom polohu těchto křivek k invariantním prvkům kollineace; invariantní křivky jsou u typů 1.—5. prostorové, u 6—9. jsou to křivky rovinné, u typů 10.—13. pak přímky. Vedle toho odvozuje rovnici invariantního Reyeova komplexu u jednotlivých typů, hledá dále rovnice invariantních ploch 2. stupně a lineárních komplexů. Úvahy Pittarelliho jsou ryze analytické.

K stanovení křivek a ploch invariantních při grupách kollineací vrátil se *Lie* r. 1895[50]; doplnil uvedené své výsledky dřívější určením útvarů bodových, jež jsou invariantní při grupách ∞^2 a ∞^1 kollineací. Nalezl 7 typů ploch s grupou ∞^2 kollineací, jež nejsou vesměs po dvou záměnné, 4 typy ploch s grupou ∞^2 po dvou záměnných kollineací. Plochy a křivky invar. při ∞^1 kollineacích probírá dle typů.

Geometricky vyšetřoval *Enriques*[42] plochy, spec. algegraické, invariantní při grupě ∞^1, ∞^2 a ∞^n ($n > 2$) kollineací obecných typů. Při grupě ∞^1 kollineací takových jsou invar. křivky, obecně transcendentní, tvořící racionální kongruenci 1. stupně (Klein-Lieovy). Aby při kollineacích jednoparametrové grupy kollineací, definované systémem rovnic transformačních

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \varrho x_2 : \varrho^\mu x_3 : \varrho^\nu x_4$$

s parametrem ϱ byla invar. algebraická plocha n. stupně

$$f = \Sigma a_{ikhl} x_1^i x_2^k x_3^h x_4^l \quad (\text{kde } i + k + h + l = n),$$

musí existovati vztahy

$$k + h\mu + l\nu = k' + h'\mu + l'\nu \quad (i' + k' + h' + l' = n).$$

---

[49]) G. Pittarelli, I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario. Annali di matem. (2) 22. 1894 pp. 261—312.

[50]) Lie, Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten, Leipz. Berichte 47. 1895. pp. 209—260. — Prostorové křivky W vyšetřuje též W. de Tannenberg, Sur les équations aux dérivées partielles etc., Ann. de Toulouse 5. 1891. pp. 127—137.

Enriques rozlišuje zde tři případy: 1. Absol. invarianty μ, ν jsou oba irracionální; platí-li uvedená relace s racion. koeficienty mezi μ a ν, existuje svazek invariantních ploch; tyto plochy, obsahujíce transcendentní křivky, invariantní při ∞^1 kollineacích (grupy „transcendentní"), připouštějí ∞^2 záměnných kollineací. 2. Jeden (pouze) z invariantů μ, ν je racionální; existuje jen svazek invariantních kuželů, jež dovolují grupu aspoň ∞^5 kollineací. 3. Oba invarianty jsou racionální (grupu nazývá zde algebraickou); existuje neomezené množství alg. ploch invariantních. Invariantní plochy algebraické jsou racionální nebo přímkové (lze je transformovati v přímkové). — Ustanoviv 13 možných typů grup s ∞^2 kollineacemi obecných typů, hledá analyticky, jindy syntheticky plochy při jednotlivých z těchto grup invariantní; dochází k výsledku, že ∞^2 (ne více) kollineací připouštějí jenom tyto plochy, tvořící vždy svazek: 1. plochy Klein-Lieovy

$$y_1^a y_2^b y_3^c = k \cdot y_4^{a+b+c},$$

2. zvláštní plochy přímkové s dvěma řídícími nekon. blízkými, 3. zvláštní plochy se svazkem kuželoseček, 4. plochy algebraické 6. stupně, invariantní při kollineacích, při nichž je invar. kub. křivka prostorová a bod na ní. Plochy 1.—3. jsou obecně transcendentní, ale je mezi nimi také nekon. mnoho algebraických. — Více než ∞^2 kollineací dovolují, jak nalézá úvahami o čarách asymptotických, pouze rovina, plocha 2. st., kužely (spec. kvadratický) a rozvinutelná plocha kub. křivky. K nim připojil později [51]) kubickou plochu Cayleyovu (s ∞^3 kollin.), byv na její opomenutí upozorněn rozborem Lieovým.

Úvahy a výsledky Enriquesovy doplnil *Fano* [52]), rozšířiv je na kollineace partikulární.

Kdežto dříve známy byly porůznu některé komplexy, invariantní při grupách proj. transformací, totiž komplexy lineární, komplex tetraedrální, speciální komplexy tečen u ploch invariantních a přímek protínajících invar. křivky, určil soustavně

---

[51]) Atti Ist. Veneto (7) 5. 1893—4. pp. 638—642.

[52]) G. Fano, Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse. Atti Acc. Lincei Rend. (5) 4.$_1$. 1895 pp. 149—156.

rozmanité typy komplexů invariantních *Amaldi*[53]). Poněvadž komplexy připouštějící grupu o 1 a 2 parametrech zahrnuty implicitně ve vyšetřováních Lieových (z r. 1895), vychází Amaldi od grup 3parametrových. Všeobecně ovšem má 3param. grupa invariantní komplex, jejž vytvořuje svými transformacemi z libovolné přímky. Běží o to ustanoviti různé typy těchto komplexů a vyšetřiti, které nejširší grupy připouštějí. Klassifikace grup 3parametrových, jež tu je základem, byla v podstatě známá; neintegrovatelné grupy 3param. (4 typy) vedou k 8 typům invariantních komplexů, vesměs soběduálních. Mezi nimi zajímavé jsou kubické komplexy přímek, jež protínají rozvin. plochu prost. křivky 3. st. v bodech konstantního dvojpoměru, a komplexy přidružené k přímkové ploše kvadratické; jestliže vytvoř. přímky jedné soustavy její jsou pevné, jest při 3param. grupě příslušné invariantních ∞^2 kongruencí lineárních, jichž řídícími přímkami jsou vždy dvě ze zmíněných přímek, ∞^1 těchto kongruencí tvoří inv. komplex; jestliže však dotčená soustava vytvoř. přímek se transformuje jednoparametrovou grupou, jest příslušný komplex invar. kvadratický (2 typy) a grupa jeho 4parametrová. — Integrovatelné grupy 3param. nehomogenní konstruuje Amaldi z homogenních lineárních grup, udaných Liem; stačí připojiti k nim po případě translace. Grupa obsahující výhradně translace vede ke 3 typům komplexů (speciálním); grupa obsahující dvě infinitesimální translace nevede k novým typům. Největší žeň poskytují grupy 3param., které dostáváme z Lieových lineárních grup s 2 parametry připojením jedné infinit. translace, a grupy 3param. bez infinit. translací. Vyloučiv předem mnohé grupy nalézá Amaldi vyšetřením zbývajících řadu (23) komplexů, z nichž většina připouští pouze 3parametrovou grupu. Celkem všech typů invar. komplexů, jež nalézá svým rozborem Amaldi, jest 34. Vyšetřování Amaldiho vedeno analytickou methodou Lieovou; převádí každou grupu 3param., danou přirozeně v souř. bodových, na isomorfní grupu, kterou ona indukuje na kvadratické 4rozměrné varietě přímek v prostoru. Z těchto výrazů pro infinit. trans-

[53]) U. Amaldi, Sui complessi di rette, che ammettono un gruppo continuo proiettivo. Rend. Palermo 23. 1907. pp. 227—250.

formace přímek určuje pak obvyklou cestou invar. komplexy, resp. soustavy ∞^2 invar. kongruencí, z nichž (vždy po ∞^1) se skládá nekonečné množství invariantních komplexů, závislé na libovolné funkci dvou argumentů.

39. Z útvarů invariantních při kollineačních grupách nejdůležitější jsou kuželosečka, prost. křivka 3. stupně, obecná plocha 2. stupně a lineární komplex.

Automorfními kollineacemi posledních tří útvarů zabýval se hlavně *R. Sturm*, a to v souhlase se všemi svými pracemi ryze syntheticky [54]). Kollineaci, při níž je prostorová kubika invariantní [55]), lze definovati, přiřadíme-li sobě pět dvojic bodových takto zvolených: A_1, A_2 buďtež body na křivce, tečna křivky v bodě A_1 protíná oskulační rovinu α_2 (v A_2) v bodě A_3, obdobně tečna v A_2 protíná oskul. rovinu α_1 bodu A_1 v bodě A_4, konečně A_5 je libovolný bod křivky; obdobně zvolíme body korrespondující A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5. Ježto z bodů A'_1, A'_2, A'_5 lze voliti každý na ∞^1 způsobů, existuje ∞^3 kollineací, při nichž je kubika invariantní. Na kubické křivce invariantní při kollineaci vzniká touto kollineací proj. transformace její řady bodové. Invariantní čtyrstěn kollineace v S_3 je oskulačním čtyrstěnem křivky kubické, při oné kollineaci invariantní. Libovolná kollineace v S_3 netransformuje žádnou obecnou prost. křivku 3. st. v ni samu; je-li však při některé kollineaci křivka taková invariantní, existuje celý systém ∞^2 křivek kub., při kollineaci té invariantních; křivky tohoto systému mají všechny invar. čtyrstěn kollineace stejně za oskulační čtyrstěn. Jsou dvě podmínky, aby při kollineaci byla kubika invariantní; musí totiž o bodech X, X', v kollineaci sobě odpovídajících na př. platiti $(XX'AB) = (XX'DC) = (XX'BD)$, kde A, B, C, D

---

[54]) Algebraickými pomůckami vyšetřovány automorfní lin. transformace plochy 2. st., kuželosečky a lin. komplexu v Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 2. svazku 1. díl (1891) pp. 356—401.

[55]) R. Sturm, Über Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren, Math. Ann. 26. 1886 pp. 465—508.

jsou průsečíky spojnice XX' se stěnami čtyrstěnu, ležícími proti vrcholům A_1, A_2, A_3, A_4 [56]).

Algebraickým ekvivalentem automorfní kollineace plochy 2. st. je automorfní lineární transformace kvadratické formy; vedlo by však daleko zabývati se četnými ryze algebraickými úvahami o takových transformacích forem kvadratických, jež podali Hermite, Cayley, Frobenius, Voss a j. Syntheticky vyšetřoval, jak uvedeno, automorfní kollineace plochy 2. st. *R. Sturm* [55]). Definuje kollineaci v S_3, při níž jest plocha P invar., dvěma způsoby. Kollineace taková je totiž stanovena, přiřadíme-li sobě pět dvojic bodových (AA'), (BB'), (CC'), (DD'), (EE'), takto zvolených: bod A kdekoli v prostoru, tím spolu určena polární rovina jeho π vzhledem k P, jež protíná P v kuželosečce K, B kdekoli na ploše P, spojnice AB protne π v bodě, jehož polára vzhledem ku K má na kuželosečce té body C, D, bod E konečně kdekoli na K; stejně body, jež těmto mají korrespondovati. Protože A' lze zvoliti na ∞^3 způsobů, B' ∞^2 způsoby, E' ∞^1 způsoby, existuje ∞^6 kollineací uvažovaných. Nebo dejme tomu, že $a_1a_2a_3$ $a'_1a'_2a'_3$ jsou paprsky jednoho systému vytvořujících přímek na ploše, $b_1b_2b_3$ $b'_1b'_2b'_3$ přímky druhé řady; pak je kollineace určena přiřadíme-li pěti bodům a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_3 resp. body $a'_1b'_1$, $a'_1b'_2$, $a'_2b'_1$, $a'_2b'_2$, $a'_3b'_3$. Kollineací takto definovanou přecházejí vytvoř. přímky každého systému v přímky téhož systému (kollineace 1. způsobu); také zde vyplývá ∞^6 kollineací. Poněvadž však lze paprskům jedné soustavy přiřaditi také paprsky v druhé, je patrno, že existují ještě kollineace (2. způsobu), při nichž systém jeden přechází v druhý. Pro kontinuitní soustavy kollineací přicházejí v úvahu ovšem jen transformace 1. způsobu. Jádrem úvah Sturmových je pak vyšetřiti, zdali a jaká existuje podmínka, aby při obecné kollineaci byla plocha 2. st. invariantní. Nalézá, že při libovolné kollineaci v S_3 není žádná plocha 2. st. invariantní, je-li však

---

[56]) Soustavou ∞^2 křivek kubických téhož oskulačního čtyrstěnu zabývá se (dodatkem k cit. pojednání M. A. 26) Sturm, Zur Theorie der Collineation und Correlation, Math. Ann. 28. 1887 pp. 271—2; viz též jeho Liniengeometrie I. pp. 360—2. Podrobně E. Heinrichs, Über den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben. Diss. Münster 1887.

při některé kollineaci 1. způsobu jedna plocha invar., jest invar. spolu svazek ∞^1 ploch 2. st. se společným prostorovým čtyrúhelníkem. Podmínkou toho, aby plochy s čtyrúhelníkem $A_1A_2A_3A_4$ byly invariantní, jest, by $(XX'AB) = (XX'DC)$, kde zase X a X' jsou body korrespondující, A, B, C, D pak průsečíky jich spojnice se stěnami invar. čtyrstěnu kollineace. Podobný jest výsledek úvah o kollineacích 2. způsobu: splněny-li podmínky $(XX'BD) = -1$, $(ABCD) = -1$, (nebo analogické), existuje systém ∞^2 invariantních ploch 2. st Obrací se ještě k typům dvojosé kollineace a homologie; při této jsou pouze transformace 2. způsobu, při každé dvojosé kollineaci jest 1. způsobem ∞^3 ploch 2. st. invar, každá daná plocha 2. st. připouští ∞^3 takových kollineací; zvláštní vlastnosti má involutorní kollineace dvojosá.

O automorfních lineárních transformacích lineárního komplexu podali některé synthetické úvahy *E. Caporali* a *del Pezzo* [57]). Obšírněji pojednal o transformacích takových *R. Sturm* [58]). Existuje ∞^{10} automorfních kollineací lineárního komplexu; neboť každá kollineace, při níž jest lin. komplex invariantní, převádí některý prostorový pětiúhelník jeho, jehož stranami je určen, v jiný, jsouc stanovena pěti dvojicemi vrcholů těchto pětiúhelníků; poněvadž pak lin. komplex obsahuje ∞^{10} takových pětiúhelníků (první vrchol lze zvoliti ∞^3 způsoby, pro další tři jest předepsána rovina, v níž mají ležeti, tedy $(\infty^2)^3$ voleb, pro poslední vrchol dvě roviny, rovina 1. a 4., tedy ∞^1 voleb), máme ∞^{10} voleb a tolikéž kollineací. Při ∞^{10} kollineacích lin. komplexu jest také invariantních ∞^7 kubických křivek prostorových, k nimž patří nullový systém komplexu, tedy každá dovoluje ∞^3 kollineací. Obecný lin. komplex, invariantní při kollineaci, prochází jedním ze 3 prost. čtyrúhelníků invariantního čtyrstěnu kollineace a má obě zbývající hrany jeho za poláry. Při libovolné kollineaci není žádný obecný lin. komplex invariantní; je-li však jeden invariantní, jest jich celý svazek inva-

---

[57]) E. Caporali e P. del Pezzo, Introduzione alla teoria dello spazio rigato v Memorie di geometria di E. Caporali, Napoli 1888, pp. 270—312, zvl. pp. 307—312; některé jednotlivosti nejsou správné.

[58]) R. Sturm, Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie I. (1892) pp. 307—319.

riantních, jež procházejí týmž čtyrúhelníkem z hran invar. čtyrstěnu kollineace; pro kollineaci jest jednoduchou podmínkou požadavek, aby byl při ní invar. lin. komplex. Věty tyto jsou zcela podobny větám o automorfních kollineacích 1. způsobu ploch 2. stupně. Při kollineaci, která nemění ∞^1 lin. komplexů, jest také ∞^1 ploch 2. st. invariantních 1. způsobem; mezi svazkem invar. ploch 2. st. a svazkem invar. lin. komplexů existuje korrespondence (2, 2). Zkoumá dále kollineaci dvojosou, osovou a homologii, zdali a jakým způsobem může při nich. lin. komplex býti invariantní.

40. *Kontinuitní grupy* automorfních kollineací uvažovaných útvarů (vyjímaje lin. komplex) určil *Lie* v souvislosti s ostatními úvahami o proj. grupách v S_3.

Grupa kollineací, při nichž je invariantní kuželosečka je tím důležita, že v případě, kdy kuželosečka je imaginárním (t. zv. absolutním) kruhem na rovině v nekonečnu, jest 7parametrová grupa ta grupou Euklidovských pohybů a podobnostních transformací. Grupa tato [59]) obsahuje tři infinit. translace p, q, r a čtyrparam. subgrupu holoedricky isomorfní s homogenní lin. grupou 2 proměnných. Na tom založeno stanovení subgrup grupy s invariantní kuželosečkou; jednotlivé subgrupy zmíněné hom. lin. grupy, známé z dřívějšího rozboru, rozšiřují se v symbolech svých infinit. transformací o člen tvaru $\alpha p + \beta q + \gamma r$ a doplňují „volnými" přípustnými translacemi. Takto nalézá Lie tabulku subgrup 7param. grupy s invariantní kuželosečkou; body kuželosečky transformují se buď tříparam. grupou (žádný bod kuželosečky invar.) nebo dvoupam. (jeden bod křivky invar.) nebo jednoparametrovou (jeden dvojnásobný nebo dva jednoduché body na křivce invar.) nebo konečně jsou všechny body kuželosečky invariantní Zbývá vymýtiti subgrupy ekvivalentní s ostatními uvnitř obecné proj. grupy.

Při vyšetřování automorfních grup isolovaných křivek a ploch stanovil Lie také 4 grupy prost. grupy 3. st. [60]).

---

[59]) Lie-Engel, Transformationsgruppen III. pp. 210—218.
[60]) Lie-Engel, Transformationsgruppen III. pp. 187—190.

Všechny typy subgrup 6parametrové proj. grupy nedegener. plochy 2. st. nalezl Lie[61]) na základě výhodného obratu; místo 6param. grupy, jejíž infinit. transformace nemění plochu $z - xy = 0$ a obsahují ovšem tři proměnné, bere v úvahu holoedricky isomorfní grupu g: p, xp, x^2p, q, yq, y^2q, jež udává, kterak se transformují body na ploše; x, y jsou zde souřadnice bodu plochy, $x = const$, $y = const$ jsou rovnice vytvořujících přímek obou řad na ploše. Grupa tato má dvě invariantní subgrupy g_3: p, xp, x^2p, a γ_3: q, yq, y^2q. Subgrupy v g dělí ve dvě skupiny; k prvním počítá ty, jež nemají žádnou infinit. transformaci společnou s g_3 ani s γ_3, k druhým ony, které mají aspoň jednu infinit. transformaci z g_3 nebo γ_3. I nalézá 6 subgrup prvního druhu, potom samozřejmou kombinací infinit. transformací z g_3 a γ_3 13 subgrup, jež obsahují pouze infinit. transformace z obou těchto 3param. subgrup, a konečně 3 subgrupy, které mají jednak infinit. transformace nepatřící ku g_3 ani γ_3, jednak transformace těchto. Korrespondující subgrupy původní 6param. grupy plynou potom přímo, když nahradíme symboly pomocné grupy g infinitesimálními transformacemi oné. Klassifikace subgrup plochy 2. st. vede k výsledku, že při každé subgrupě 6param. proj. grupy nedegenerované plochy 2. st. jest invariantní vytvořující přímka na ploše, vyjímaje jednu 3param. grupu, při níž zase je invar. bod mimo plochu a jeho polární rovina vzhledem ku ploše; každá subgrupa uvažované grupy je soběduální. Pro speciální hodnotu konstanty v symbolech infinit. transformací subgrup se vyskytující objevují se ještě tři nové typy; celkem 25 typů subgrup 6param. grupy nedegenerované plochy 2. stupně.

Klassifikaci automorfních kollineací nedegener. plochy 2. st. podala methodou Newsonovou *H. B. Brewsterová*[62]). Vyšetřování její jsou v nejužší souvislosti s Newsonovými, na jehož dílo dosud nepublikované se i odkazuje. Následují úvahy o výslednici

---

[61]) Lie-Engel, Transformationsgruppen III. pp. 198—206. Potom 252—254.

[62]) H. B. Brewster, Collineations of space which leave invariant a quadric surface, Kansas Univ. Bulletin 1. pp. 281—303. O kollineacích, při nichž je invar. nedegener. plocha 2. st., pojednala také R. G. Woodová, Collineations of space which transform a non-degenerate quadric surface into itself, Annals of math. (2) 2.

dvou automorfních kollineací plochy 2. st. téhož i různých typů, o struktuře grup uvedených, o singulárních transformacích a smíšených grupách plochy 2 st.

Pokud se týče lin. komplexu, naznačil Lie [63]) stručně postup, kterým možno jeho methodami ustanoviti všechny typy subgrup 10param. grupy útvaru toho. Poněvadž z primitivních grup proj. žádná nemůže býti subgrupou uvažované grupy, jest každá subgrupa její imprimitivní a proto (dle theorie imprim. proj. grup v S_3) má invar. buď prost. křivku kubickou nebo přímku nebo bod s incid. rovinou komplexem jemu přiřazenou. Přímka invariantní může býti mimo komplex nebo náležeti komplexu; v prvém případě je nejširší grupa příslušná holoedricky isomorfní s 6param. grupou nedegenerované plochy 2. st., v druhém se 7param. grupou Euklidovských pohybů a podobnostních transformací. Subgrupy těchto převedou se na subgrupy grupy lin. komplexu, leda by některé bylo vylоučiti jako ekvivalentní s jinými uvnitř této širší grupy. Zbývá vyšetřiti subgrupy s invar. bodem a incidentní rovinou, při nichž není žádná přímka invariantní. Každá subgrupa grupy lin. komplexu je soběduální.

Podrobně zabýval se stanovením subgrup 10param. grupy lin. komplexu methodami Lieovými *E. P. Knothe* [64]). Používá fakta, že grupa ta je isomorfní s 10param. největší konečnou nesvodnou grupou dotykových transformací roviny a s 10param. grupou všech konformních bodových transformací prostoru. Podává nejprve klassifikaci subgrup u každé z těchto tří grup, jež pak také podrobně určuje, prováděje úvahy a počet vždy u té grupy, která se k tomu jeví nejvýhodnější. Dle Lieovy klassifikace subgrup grupy lin. komplexu vyšetřuje nejprve subgrupy, jež mají invar. (aspoň jeden) bod, potom subgrupy s invar. křivkou nebo plochou (bez křivky), konečně subgrupy bez invar. útvaru bodového. Nejdelší část úkolu, určení totiž subgrup, při nichž je bod lin. komplexu invariantní, řeší k vůli kontrole dvěma methodami (Lieovou a Engelovou). Nalezené grupy charakterisuje

---

[63]) Lie-Engel, Transformationsgruppen III. pp. 258—262.

[64]) E. P. Knothe, Bestimmung aller Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes, Diss. Leipzig 1892 (Arkiv for Math. 15. 1892).

invariantními útvary geometrickými, po případě ještě differenciálními invarianty, aby vyšetřil, existují-li mezi subgrupami těmi některé ekvivalentní, z nichž by bylo pouze jednu podržeti. Z křivek mohou býti invariantní pouze přímka a prost. křivka kubická; rovinná křivka musila by míti invariantní souhrn svých tečen, jenž však nemůže patřiti komplexu. Neexistuje konečně žádná subgrupa s invariantní křivou plochou bez invariantních křivek a bodů a žádná subgrupa bez invariantního útvaru bodového.

V Brně, v listopadu 1908.

O separaci kořenů rovnic algebraických.

(Poznámka prvá.)

Napsal K. Petr.

Z věty Descartesovy, že rovnice algebraická

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \tag{1}$$

o reálných koefficientech $A_0, A_1, \ldots A_n$ má nejvýše tolik kořenů kladných, kolik je v řadě čísel $A_0, A_1, \ldots A_n$ změn znaménkových, následuje jednoduchým způsobem další věta důležitá pro separaci kořenů rovnic algebraických.

Dosadíme-li do levé strany rovnice dané

$$x = \frac{a + by}{1 + y},$$

dostaneme rovnici

$$(1 + y)^n f\left(\frac{a + by}{1 + y}\right) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_n = 0, \tag{2}$$

jejímž kořenům kladným odpovídají kořeny rovnice (1) položené mezi a a b a naopak

Užijeme-li tudíž věty Descartesovy na rovnici (2), máme ihned tento důsledek pro rovnici (1): Rovnice (1) má nejvýše tolik kořenů mezi a a b, kolik jest v řadě čísel $B_0, B_1, \ldots B_n$ změn znaménkových.