Vincenc Jarolímek

O plochách vytvořených rotací imaginárné přímky nebo kuželosečky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 5, 488--493

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123806`

Poznamenání. Na IV. mezinárodním kongresu mathematiků, který se konal v dubnu r. 1908 v Římě, bylo též rokováno o potřebě zavésti jednotné označení operací, vyskytujících se ve vektorové analysi, aspoň pokud jde o tak zvaný minimální rozsah její; konečná rozhodnutí o tom stanou se snad na příštím kongresu, jenž se má odbývati r. 1912 v Cambridge. Zatím přijímá všechny v té příčině učiněné návrhy časopis „L'enseignement mathématique"; z návrhů, až dosud v časopise tom uveřejněných, zasluhují pozornosti návrhy C. Burali-Fortiho a R Marcolonga (jichž bylo použito též ve spise od obou těchto autorů právě vydaném: „Elementi di calcolo vettoriale"), dle nichž označoval by se skalární součin dvou vektorů $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (místo Hamiltonova označení $- S\,(\mathbf{ab})$ nebo Grassmannova $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ nebo Gibbsova $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$) a vektoriální součin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (místo Hamiltonova označení $V(\mathbf{ab})$ nebo Grassmannova $[\mathbf{ab}]$ nebo Gibbsova $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Dosti obvyklé jest již další navrhované jimi označení: *grad v* místo $\nabla\, v$ a *rot* **u** místo *curl* **u**. Vzhledem k tomu, že užívání počtu vektorového vždy více se šíří (zvláště ve vědách applikovaných), bylo by takové usjednocení se na základních symbolech žádoucí.

O plochách vytvořených rotací imaginárné přímky nebo kuželosečky.

Podává prof. **Vinc. Jarolímek.**

V theorii paprskových kongruencí a komplexů brány dosud v úvahu toliko paprsky reálné. Ve svém pojednání „O speciálním kvadratickém komplexu tetraedrálním" (Věstník král. České společnosti nauk, 1906) poukázal jsem k významu imaginárných paprsků komplexových. Ukázalo se totiž, že komplex uvažovaný obsahuje netoliko rotační hyperboloidy sborcené, nýbrž i nepřímkové, t. j. konvexní plochy druhého stupně. Existenci jejich lze vysvětliti jedině komplexními paprsky imaginárnými, jimiž jsou vyplněny, což také analytické vyšetření v řečeném pojednání potvrdilo. Důkaz synthetický, že imaginárná přímka jednobodová (t. j. která má jeden bod reálný) při určité poloze k ose vytvořuje rotací reálnou plochu 2. stupně, podal v III. čísle t. ročníku pan Fr. Kadeřávek, assistent č. techniky, v článku nadepsaném „Příspěvek k plochám rotačním 2. stupně". Podávám tuto přímý důkaz jednoduchý a konstrukci vlastní.

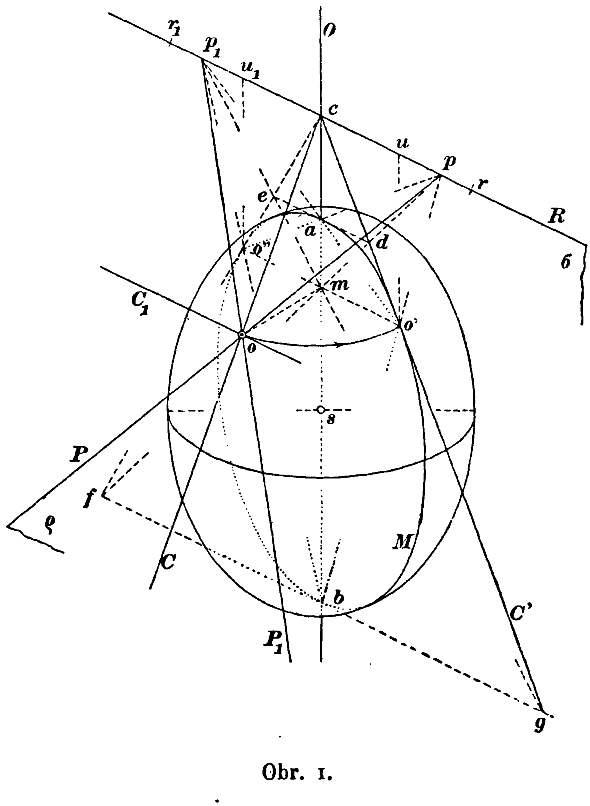
Důkaz opírá se o větu, že kuželosečka vytvoří plochu druhého stupně netoliko rotací okolo jedné své osy, nýbrž:

Kuželosečka K vytvoří rotací plochu druhého stupně **P** *i tehdy, je-li osa otáčení O mimo rovinu ϱ křivky K, ale tak, že O promítá se pravoúhelně na rovinu ϱ do jedné osy C kuželosečky K.* Libovolná přímka v prostoru A vytvoří rotací okolo O hyperboloid **H**, jenž plochu **P** proniká v tolika kružnicích, kolik bodů má přímka A s plochou **P** společných. Rovina ϱ seče plochy **P**, **H** v kuželosečkách K, L, jež majíce společnou osu C, sekou se ve čtyřech bodech. Z těch každé dva souměrné dle C mají stejné vzdálenosti od O; vytvořují tedy rotací okolo O *touž* kružnici povrchovou, plochám **P** a **H** společnou. Jsou tedy kružnice takové jen dvě (real. či imag) a plocha **P** je stupně druhého. Rozpadá-li se křivka K ve dvě imaginárné přímky sdružené o reálném průsečíku o (protože leží v reálné rovině ϱ), vytvoří se rotační plocha 2. stupně konvexní, protože sborcený hyperboloid imaginárných přímek jednobodových neobsahuje. Rovina ϱ jest patrně *tečnou* rovinou plochy v bodě o. Naše konstrukce plochy jest pak tato:

Tvořící imaginárné sdružené přímky buďtež dány v rovině ϱ jakožto samodružné paprsky elliptické involuce I o středu o (obr. 1.), jejíž jeden centrálný paprsek C jest orthogonálným průmětem osy O na rovinu ϱ, druhý pak $C'_1 \perp C$. Involuce I bude dále stanovena ještě jednou družinou paprskovou, na př. PP_1, souměrnou dle C. Je samozřejmo, že I jest involuce reciprokých polár, kterou plocha **P** indukuje na své tečné rovině ϱ.

Veďme v rovině ϱ průsečíkem $(CO) \equiv c$ přímku $R \perp O$. Involuce I vytíná na přímce R involuci bodovou, jež určena je středem c a souměrnou družinou pp_1, ve které paprsky PP_1 přímku R sekou. Touž involuci indukuje na R pronik plochy **P** s každou rovinou svazku R, tedy i meridián M, obsažený v rovině $(RO) \equiv \sigma$. Otočíme-li i tečnu $\overline{co} \equiv C$ okolo O do roviny σ, do $\overline{co'} \equiv C'$ ($\overline{om} \perp O$, $\overline{mo'} \perp O$, $\overline{mo'} = \overline{mo}$), bude meridián M určen osou O, tečnou $\overline{co'}$, dotyčným bodem o' a involucí (c, pp_1) na R. Paprsky $\overline{p_1 o'}$, $\overline{po'}$ vytnou na ose O vrcholy a, b kuželosečky M. Vedeme-li totiž $\overline{o'mo''}$, $\overline{mo''} = \overline{o'm}$, $\overline{cdo'g}$, $\overline{ceo''f}$, $\overline{ead} \parallel \overline{fbg} \parallel \overline{o''o'}$, jest $ao'bo''$ úplný čtyřúhelník do M vepsaný, pp_1m diagonálný jeho trojúhelník, tedy $\overline{mp_1}$ polára pólu p, $\overline{mp}$ polára pólu p_1; $defg$ jest čtyřúhelník M opsaný, a poněvadž $\overline{ab}$ jest osou křivky M, musí přímky $\overline{o'a}$, $\overline{gme}$, $\overline{bo''}$ směřovati ku

p_1, přímky pak $\overline{o''a}$, $\overline{fmd}$, $\overline{bo'}$ ku p. Z osy $\overline{ab}$ obdrží se střed s, $\overline{as} = \overline{sb}$, a omezí se snadno i druhá osa kuželosečky M z tečny její $\overline{o'c}$ a bodu dotyčného. Tím jest úloha řešena, ježto meridiánem M jest plocha **P**, vytvořená rotací daných imaginárných přímek sdružených okolo O, určena. V tom případě, je-li $C \parallel O$, vytvoří bod o rovník plochy, a dva sdružené průměry meridiánu M budou $\parallel P, P_1$.



Obr. 1.

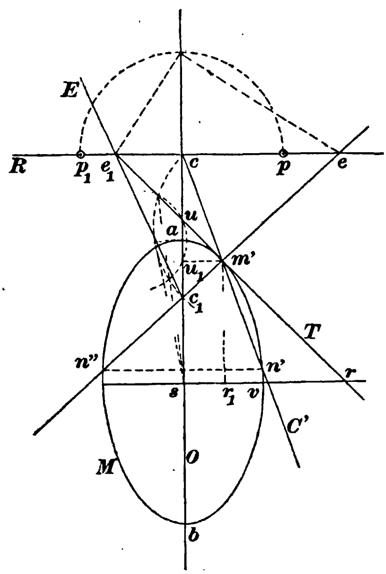
Snadno lze také určiti předem z pouhých bodů o, p, p_1, která plocha druhého stupně se vytvoří. Je-li $\overline{cp} > \overline{mo'} = \overline{mo}$, mají úsečky $\overline{ca}$, $\overline{cb}$ týž směr, plocha jest *ellipsoid*, jenž přejde v *kouli*, jestliže $\overline{cp} = \overline{co}$, ježto pak $P \perp P_1$, tak že involuce

(CC_1, PP_1) v tečné rovině ϱ jest *pravoúhlá*; pro $\overline{cp} > \overline{co}$ jest ellipsoid sploštělý, protože $\sphericalangle$ *cop* $> 45^0$ a C rozpoluje *tupý* úhel polár PP_1, pročež veškeré rovinné průseky plochy jsou ellipsy, jich *vedlejší* osa seče osu O. Ellipsoid je *prodloužený* naopak pro $\overline{cp} < \overline{co}$, ale jen potud, pokud je zároveň $\overline{cp} > \overline{mo'}$; neboť pro $\overline{cp} = \overline{mo'}$ bude $po' \parallel O$, tedy b v nekonečnu, a plocha přejde *v paraboloid*. Je-li posléze $\overline{cp} < \overline{mo'}$, připadne vrchol b na O za bod c, úsečky $\overline{ca}$, $\overline{cb}$ mají směry protivné a plocha je dvojdílným hyperboloidem.

Jsou-li tudíž imaginárné přímky tvořící dány involucí (CC_1, PP_1) a tím i involuce (c, pp_1) na R, spusťme $om \perp O$ a učiňme na R $\overline{cr} = -\overline{cr_1} = \overline{co}$, $\overline{cu} = -\overline{cu_1} = \overline{mo}$. Plocha vytvořená rotací přímek okolo O bude ellipsoid sploštělý, je-li $\overline{cp} > \overline{cr}$; koule pro $\overline{cp} = \overline{cr}$ čili $p \equiv r$; ellipsoid prodloužený, když $\overline{cu} < \overline{cp} < \overline{cr}$; paraboloid pro $\overline{cp} = \overline{cu}$ čili $p \equiv u$; dvojdílný hyperboloid, je-li $\overline{cp} < \overline{cu}$; a kužel, když $\overline{cp} = o$, $p \equiv c$ čili $P \equiv P_1 \equiv C$. Veškeré plochy tyto jsou *konvexní*, neboť vrcholy a, b na O jsou vždy reálné. Hyperboloid sborcený tudíž rotací imaginárné přímky jednobodové vytvořiti nelze; jeho plocha obsahuje vedle přímek reálných toliko přímky naprosto imaginárné (bez reálného bodu).

Dodatkem chceme ještě ukázati, jak lze sestrojiti meridián plochy druhého stupně, vytvořené rotací *kuželosečky* K, když rovina její ϱ neobsahuje osu O, ale jedna osa C křivky K připadá zase do orthogonálného průmětu osy O na rovinu ϱ:

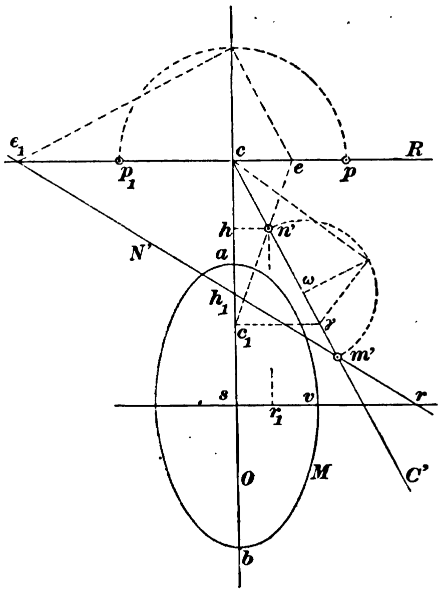
a) Kuželosečka K budiž *reálná*, m, n vrcholy její na ose C; v rovině ϱ veďme zase průsečíkem $(CO) \equiv c$ přímku $R \perp C$ a stanovme involuci indukovanou křivkou K na R souměrnou družinou pp_1. Otočme C, m, n okolo O do roviny $(OR) \equiv \sigma$, do C', m', n' a sestrojme meridián plochy M obsažený v rovině σ (obr 2.). Jest to kuželosečka určená osou O, involucí (c, pp_1) na $R \perp O$, a involucí na přímce C' o reálných samodružných bodech m' n', již sestrojíme takto: bod kuželosečky n'', souměrný ku n' dle O, spojme s bodem m'. Spojnice $\overline{m'n''}$ vytne na ose O pól c_1 příslušný ku poláře R, na R pak bod e, jemuž v involuci R je přidružen bod e_1 $(\overline{ce} \, . \, \overline{ce_1} = -\overline{cp}^2)$, tudíž spojnice $\overline{e_1 c_1} \equiv E$ polárou pólu e. Póly e, m', c_1 leží na přímce, pročež příslušné poláry E, T, R musí procházeti týmž bodem e_1; jest tedy $\overline{e_1 m'} \equiv T$ tečna kuželosečky v bodě m'. Její průsečík u na O a u_1 $(\overline{m'u_1} \perp O)$ dají jednu, body c a c_1 druhou družinu involuce, již kuželosečka indukuje na ose O. Z nich známou konstrukcí sestrojí se střed s a samodružné body a, b jakožto vrcholy křivky M. (Jsou-li tyto imaginárné, jest vytvořená plocha sborceným hyperboloidem.) Vrcholy osy vedlejší obdržíme dle $\overline{sv}^2 = \overline{sr} \cdot \overline{sr_1}$.



Obr. 2.

b) Kuželosečka K *imaginárná* buď dána souměrnou družinou mn elliptické involuce na ose C a souměrnou družinou pp_1 involuce na R. Otočme zase C, m, n okolo O do roviny $(OR) \equiv \sigma$, do C', m' n' a sestrojme meridián plochy M obsažený v rovině σ (obr. 3.). Jest to kuželosečka určená osou O, involucí (c, pp_1) na $R \perp O$, a involucí na přímce C', tentokráte elliptickou, jejíž souměrná (dle středu ω) družina $m'n'$ jest dána

V této involuci jest bodu c přidružen bod γ (sestrojený dle $\overline{\omega\gamma}\,.\,\overline{\omega c} = -\overline{\omega m'^2}$), a v involuci O bodu c bod c_1 ($\overline{\gamma c_1} \perp O$). Poláře R přísluší tedy pól c_1. Spojnice $\overline{c_1 n'}$ vytne na R bod e,



Obr. 3.

jemuž v involuci R je přidružen bod e_1 ($\overline{ce}\,.\,\overline{ce_1} = -\overline{cp^2}$), a v involuci C' bodu n' bod m'; spojnice $\overline{e_1 m'} \equiv N'$ je tedy polárou pólu n'. Průsečík $(N'O) \equiv h_1$ a pata h ($\overline{n'h} \perp O$) určují jednu, body c, c_1 druhou družinu involuce na ose O, z nichž sestrojí se obě osy kuželosečky M jako nahoře.