# Extraits des articles du t. L.

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 50 (1921), No. 4-5, 296--307

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123785

# Francouzské výtahy článků ročníku L.
# Extraits des articles du t. L.

## Amplificateur du courant continu.

Au commencement du travail se trouve un aperçu des propriétés principales des lampes valves à deux et à trois éléctrodes, et une interpretation de la notion des caractéristiques ainsi que des notions qui en résultent et dont on se sert dans ce qui suit. Ensuite on a déduit, pour le courant $di_G$ qui parcourt, sous le voltage $de_g$, dans la grille de la première lampe, le circuit compensateur ajouté à la résistance dans le circuit anodique de la dernière lampe de l'amplificateur à résistance d'Abraham-Bloch, la formule

$$di_G = \frac{S_n}{1+\frac{R_G}{R_{a_n}}+\frac{R_G}{R_{i_n}}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1+\frac{R_{ik}}{R_{a_k}^*}} \cdot de_{g_1}.$$

Dans cette formule $R_k$ signifie la résistance dans le circuit anodique de la $k$-ième lampe, $S_k$, $D_k$, $R_{i_k}$ sont des constantes caractéristiques de la même lampe.

On a ensuite vérifié cette formule dans le cas d'un amplificateur à une et à deux lampes et l'on a constaté l'accord avec les mesures.

On ne peut pas, en se servant des méthodes ordinaires, effectuer avec une précision suffisante la mesure des constantes caractéristiques des lampes, parce que les variations du courant anodique qui figurent dans lès formules respectives de ces grandeurs-là sont déterminées par la différence des lectures du miliampèremètre qui sert à la mesure du courant anodique. Ce travail donne une description et élaboration de la méthode simple suivante qui enlève cette difficulté: Dans le circuit anodique de la lampe dont les constantes caractéristiques doivent être mesurées, on intercale une grande et variable résistance ohmique $R$ et, parallèlement à elle, on branche le circuit compensateur avec un galvanomètre. On compense tout d'abord le circuit au moyen de la résistance $R$ de sorte que le galvanomètre soit sans courant; si, plus tard, change, soit le voltage de la grille, soit celui de l'anode, il s'en suit un dérangement de la compensation et un courant commence à passer par le galvanomètre Dans ce travail, on a déduit des formules indiquant comment on peut en évaluer les grandeurs cherchées (voir p. 34.).

---

## Sur la séparation des racines d'une équation algébrique selon les parties réelles des racines et sur une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

Par K. Petr.

Considérons une équation d'ordre pair $n = 2m$ (on peut, cependant, faire des considérations analogues pour les équations d'ordre impair):

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = O$$

et formons l'expression

$$f(\xi + \eta) = \eta^n + A_1 \eta^{n-1} + A_2 \eta^{n-2} + \dots + A_n,$$

où $A_1, A_2, \dots A_n$ sont des polynômes de $\xi$. Si on éxécute la division succéssive des polynômes

$$g(X) = X^m + A_2 X^{m-2} \dots + A_{2m},$$
$$h(X) = A_1 X^{m-1} + A_3 X^{m-3} + \dots + A_{2m-1}$$

d'après l'algorithme d'Euclide, on obtient une suite d'équations de la forme:

$$\mathfrak{c}_0^2\, g(X) = q_0(X)\, h(X) - r_1(X),$$
$$\mathfrak{c}_1^2\, h(X) = q_1(X)\, r_1(X) - \mathfrak{c}_0^2\, r_1(X),$$
$$\mathfrak{c}_2^2\, r(X) = q_2(X)\, r_2(X) - \mathfrak{c}_1^2\, r_3(X),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathfrak{c}_{m-2}^2\, r_{m-3}(X) = q_{m-2}(X)\, r_{m-2}(X) - \mathfrak{c}_{m-3}^2\, r_{m-1}.$$

Ici $\mathfrak{c}_k$ est le coefficient de la plus haute puissance de la variable $X$ dans le polynome $r_k(X)$, $\mathfrak{c}_0 = A_1$. Les coefficients des polynômes $r_k(X)$ sont tous des polynômes de $\xi$, $r_{m-1}$ étant indépendant de $X$. Ecrivons encore

$$r_K(O) = \mathfrak{d}_K, \quad h(O) = A_{2m-1} = \vartheta, \quad g(O) = A_{2m} = \vartheta_{-1}$$

et construisons la suite de polynômes de la variable

$$1,\ \mathfrak{c}_0,\ \mathfrak{c}_1,\ \dots,\ \mathfrak{c}_{m-2},\ r_{m-1},\ \vartheta_{m-1},\ \vartheta_{m-2},\ \dots,\ \vartheta_1,\ \vartheta_0,\ \vartheta_{1-};$$

si, pour une valeur de $\xi$, deux termes voisins de cette suite ne sont pas nuls, et si, pour cette valeur de $\xi$, les valeurs de $r_{m-2}$ et de $\vartheta_{-1} = A_{2m} = f(\xi)$ ne sont pas nulles, cette suite indique, par le nombre de changements de signe, le nombre de racines de l'équation proposée dont la partie réelle surpasse $\xi$.

L'auteur donne une démonstration algébrique détaillée de ce théorème; il en résulte, en même temps, comme simple corollaire, une démonstration algébrique du théorème fondamentale de l'algèbre, sur l'existence d'une racine de toute équation (de degré pair). De cette considération découlent encore des expressions explicites pour les polynômes $c_K$, $\vartheta_K$ moyennant les $A_k$. Ces polynômes sont, en effet, les mineurs principaux des déterminants (multipliés, dans le deuxième cas, par $A_{2m}$) $| \mathfrak{A}_{iK} |$, resp. $| - \mathfrak{a}_{iK} | \cdot A_{2m}$ $i, k = 1, 2, \ldots, m$,

où, pour $i < l$

$$\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{ji} = A_{2i+2j-3} - A_1 A_{2i+2j-4} + A_2 A_{2i+2j-5} - \ldots + A_{2i-2} A_{2j-1}$$

et $$\mathfrak{a}_{11} = -\frac{A_{2m-1}}{A_{2m}}, \quad \mathfrak{a}_{i1} = \mathfrak{a}_{1i} = A_{2i-3}, \quad \mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ji},$$

ret, pou $i > l$, $j > l$, $i < j$ $\quad \mathfrak{a}_{ji} = \mathfrak{A}_{i-1j} - A_{2i-3} A_{2j-2}$

Il est aisé de déduire, du théorème mentionné plus haut, des suites qui indiquent le nombre de racines dont la partie réele est positive ou de racines dont la valeur absolue est inférieure à un nombre positif.

---

## Sur une quadrique imaginaire de la III. espèce.

Par V. Jarolímek.

Dans son mémoire „Sur quelques espèces de coniques imaginaires" publié dans les „Rozpravy II. tř. České Akademie věd" (année XXI, num. 31), dont les résultats il a étendus, dans le 3e t. de sa „Géométrie projective", aux quadriques imaginaires, l'auteur a divisé ces figures en quatre espèces différentes. Les quadriques imaginaires de la III. espèce sont celles qui n'ont ni de centre réel ni d'axes et de diamètres réels, mais pui peuvent contenir une biquadratique gauche réelle (celle-ci pouvant se décomposer en deux coniques) et qui peuvent, de plus, posséder une développable réelle de la $4^e$ classe. (ou, le cas échéant, deux cônes quadratiques tangents réels). Dans l'article actuel, l'auteur traite en détail de la quadrique imaginaire qui est déterminée par deux coniques réelles et par un plan tangent réel, qui coupe l'une deux coniques en deux points réels, l'autre en deux points imaginaires; dans la suite, il donne la construction des deux cônes quadratiques réels circonscrits à la quadrique imaginaire. Il résout, en dernier lieu, le problème réciproque: étant donnée une quadrique de la troisième espèce par deux cônes quadratiques tangents réels et par un point réel, extérieur à l'un des deux cônes et intérieur à l'autre, construire les deux coniques réelles situées sur cette quadrique.

---

## Quelques remarques concernant la chronologie des découvertes et des écrits géométriques d'Archimède.

Par Q. Vetter.

Chacune des oeuvres géométriques d'Archimède, la „Méthode" exceptée, contient un seul ou plusieurs théorèmes principaux. Les autres théorèmes qui s'y trouvent ne sont là que pour soutenir la démonstration ou bien ils sont simplement complémentaires. La „Méthode" elle-même nous montre la manière dont Archimède a démontré la plupart de ces théorèmes. Nous ne nous sommes pas occupés de la „Mesure du cercle" qui se distingue de ses autres oeuvres géométriques par son caractère général.

La chronologie des oeuvres d'Archimède comprend deux questions différentes: la chronologie de ses découvertes et celle de ses écrits. Avant la mort de Conon qui marque une limite bien distincte dans ses écrits comme dans ses découvertes Archimède faisait des recherches sur la théorie du levier dont une partie des résultats est perdue. Les théorèmes principaux du I[ier] livre sur „L'équilibre des plans" sont les théorèmes sur la position du centre de gravité du parallélogramme, du triangle et du trapèze qu'il n'a pas découvert suivant sa méthode, mais d'une autre manière sans doute. C'est probablement à cette époque qu'il découvrit et publia même peut-être les théorèmes sur la position du centre de gravité d'autres figures planes, du prisme, du cylindre et du cône. Il est possible de reconstruire avec certaine vraisemblance le procédé par lequel Archimède découvrit le centre de gravité du segment parabolique. C'est ainsi qu'il trouve la manière expliquée dans la „Méthode“ et par là la formule du même segment. Cette méthode conduisit Archimède à presque toutes ses découvertes. La fécondité créatrice de la période qui suivit ne lui permit même pas d'élaborer en détail les démonstrations exactes d'exhaustion, quoiqu'il en ait connu les traits principaux, excepté celles de l'ellipsoïde de révolution et de l'hyperboloïde à deux nappes. Après le centre de gravité des figures curvilignes il employa sa nouvelle méthode pour ses recherches sur le centre de gravité des solides, publiées probablement plus tard dans quelque écrit perdu. Par ce travail il fut ammené à la découverte des formules pour le volume des segments des quadriques et il déduisit du volume de la sphère et de son segment l'aire de ces solides. Il est même possible qu'il découvrit par sa méthode les formules pour l'aire des figures limitées par la spirale archimédienne. Il envoya à Conon une liste de la plupart de ces théorèmes formants la base de ses écrits géométriques. Il est difficile de dire, s'il connaissait déjà ses autres théorèmes, quoiqu' on puisse le supposer, sans toutefois pouvoir affirmer que les démonstrations exactes lui en eussent déjà été connues.

La période suivante est signalée par des années de travail épuisant dont témoignent ses mémoires scrupuleusement composés et les allusions qui nous permettent de juger sur ses écrits perdus. Le premier de ces mémoires, la „Quadrature de la parabole“, était encore déstiné à Conon, mais celui-ci mourut avant qu'Archimède ait pu le lui envoyer. Bien des années séparent la publication du mémoire „Sur les spirales“, qui succéda de près celle des deux livres „Sur la sphère et le cylindre“, de la mort de Conon. Les théorèmes principaux de ces deux livres se rapportent à l'aire et au volume de la sphère et de son segment, ceux du mémoire „Sur les spirales“ à l'aire des figures et ceux du mémoire „Sur les conoïdes et sphéroïdes“ au volume des quadriques. Il est possible de suivre dans chacun de ces mémoires comment Archimède a vraisemblablement procédé en partant des théorèmes principaux qu'il appuyait et complétait de tout ce qu'il lui fallait pour les démontrer. Ce n'est qu'après ces écrits qu'il composa, d'après notre avis, sa „Méthode".

Les recherches géométriques d'Archimède furent terminées et couronnées par l'application des théorèmes sur la position des centres de gravité dans le traité „Des corps flottants".

---

## Sur la représentation conforme par les quatre fonctions-$\vartheta$ de Jacobi.

Par Ch. Dusl.

Quoique les fonctions-$\vartheta$ n'aient pas de formule d'addition, on peut toujours représenter leur partie réelle et purement imaginaire par des séries convergentes et en calculer leur valeur numérique pour les valeurs générales de l'argument $r + is$. Le calcul est très simple pour le module $\tau = i$. En utilisant les formules de la transformations linéaire des fonctions-$\vartheta$ on obtient les équations des courbes (tracées sur la gravure 4 et 5.) correspondantes à $r =$ const., $s =$ const. pour des valeurs spéciales de $r$ et de $s$.

---

## Sur la construction de l'hyperbole équilatère déterminée par deux points imaginaires et deux tangentes également imaginaires.

Par J. Klíma.

Pour construire les centres des deux hyperboles équilatères réelles, déterminées de la manière indiquée ci-dessus, je me sers de deux procédés différents.

Dans le premier j'applique les deux théorèmes suivants:

*a*) Le lieu des centres des coniques passant par deux points donnés et touchant deux droites données se compose de deux coniques concentriques qui sont circonscrites à un même parallélogramme.

*b*) Le lieu des centres des hyperboles équilatères, pour lesquelles le point $r$ et la droite $R$ sont pôle et polaire, et le point $\omega$ est le point central de l'involution des pôles réciproques sur une droite $Q$, est une circonférence passant par les points $r$, $\omega$ et par le point d'intersection de deux droites, dont l'une contient le point $r$, l'autre le point $\omega$, et qui sont parallèles, respectivement, aux droites $Q$, $R$.

Le second procédé consiste en ce qu'on considère la circonférence homographique à l'hyperbole et touchant les deux tangentes imaginaires données. Pour construire les lignes de fuite de cette homographie, on déduit d'abord le théorème suivant:

L'enveloppe de toutes les cordes d'une conique qui sont projetées d'un point $f$ par un angle droit, est une conique, dont ce point est un foyer et la polaire de ce point par rapport à la conique donnée une directrice.

---

## Sur le mouvement d'un point matériel dans le champ de gravitation d'après la théorie générale de la relativité.

Par A. Libický.

*A. Einstein* a établi les équations différentielles du mouvement d'un point matériel dans le champ de gravitation par un raisonnement d'ordre géométrique; mais on peut les déduire aussi en calculant directement la variation de l'integrale $\int ds$, qui figure au premier membre de l'équation fondamentale de la courbe géodétique. C'est là l'objet de la première partie de cet article. Dans la deuxième partie sont traitées de différentes solutions du problème nommé par *Einstein* l'approximation d'ordre zéro, l'approximation du premier ordre et du deuxième ordre. Ces approximations sont présentées sous une autre forme qui m'a paru être plus avantageuse; j'ai de même, partout où il le fallait, complété et développé les déductions d'*Einstein.*

---

## Contribution expérimentale à la théorie de la pluralité des états stables de l'atome.

§ 1. La théorie atomique de M. M. Bohr et Perrin attribue à l'atome des états stables différents à l'énergie interne variable, de sorte que le diamètre atomique est d'autant plus grand que l'énergie interne est plus grande. De même la fréquence $\nu_0$ d'oscillations propres à l'atome est d'autant plus grande que l'énergie atomique est plus grande.

On appelle réfraction spécifique d'un milieu transparent l'expression

$$N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho} \tag{2}$$

où $n$ signifie l'indice de réfraction de la radiation de fréquence $\nu$, et $\rho$ la densité absolue du milieu.

D'autre part on a aussi, en désignant par $C$ une constante et en considérant un corps formé des atomes identiques,

$$N = \frac{C}{\nu_0^2 - \nu^2} \tag{2'}$$

Dans le cas d'un mélange homogène on a

$$N = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \ldots \tag{3}$$

en supposant pour les concentrations $\alpha$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 1.$$

D'après la théorie des différents états stables de l'atome on peut envisager un gaz, par exemple, comme un mélange constitué d'autant de différents gaz que des formes stables de ses atomes s'y trouvent présentes dans un moment donné. Chaque constituant aura, d'après l'équation (2'), la réfraction spécifique $N_k$ d'autant plus petite que son $\nu_0$ sera plus grand, c'est à dire que l'état stable de ses atomes sera d'un rang plus élevé, d'une énergie interne plus grande.

Ceci laisse prévoir une diminution de la réfraction spécifique d'un gaz par abaissement suffisant de sa pression.

§ 2. L'auteur a étudié, en se servant des méthodes d'observation interférentielles très précises et bien avant qu'il eût connu les travaux théoriques de M. M. Bohr et Perrin, la variation de la réfraction spécifique avec la pression au-dessous d'une atmosphère, pour les gaz: l'air et l'anhydride carbonique.

§ 3. On a travaillé avec la radiation verte de mercure et, pour exprimer la variation de la réfraction $n-1$ avec la pression, on a adopté la formule

$$n-1 = Kp\,(1+\beta\, p) \qquad (6)$$

Les valeurs trouvées pour les constantes $K$ et $\beta$ donnent pour les valeurs de $n-1$, sous les conditions normales de température et de pression, des résultats très bien concordants avec les meill ures observations antérieures. (Voir tableaux I et II, pg. 156.).

§ 4. En exprimant, pour les pressions au-dessous d'une atmosphère, la densité $\varrho$ par une formule analogue à (6)

$$\varrho = K_\varrho\, p\, (1+\beta_\varrho\, p)$$

et en simplifiant l'expression (2), on obtient pour la réfraction spécifique

$$N = \tfrac{2}{3}\,\frac{n-1}{\varrho} = C\,(1+(\beta-\beta_\varrho)\,p)\,.$$

L'invariabilité de $N$ avec la pression exige alors l'égalité de $\beta$ et de $\beta_\varrho$, tandisque l'expérience a donné pour $\beta$ des valeurs beaucoup plus grandes qu'elle n'a donné pour $\beta_\varrho$ (l'air, $\beta.10^8 = 357$, $\beta_\varrho\,.\,10^8 = 61$; l'anhydride carbonique 1063, 730). $N$ varie alors avec la pression de même que nous l'avons prévu dans le § 1.

Le tableau III, pg. 158., montre que les valeurs de $\beta$, trouvées par d'autres auteurs (Mascart, Chappuis et Rivière, Perreau) qui ont envisagé des intervalles de pression allant considérablement au-dessus d'une atmosphère, sont beaucoup plus petites que celles de l'auteur, et la collonne 5. de ce même tableau montre que dans des intervalles de pression, ne surpassant pas de beaucoup une atmosphère, $\beta$ est en raison inverse avec la pression moyenne $p$. Il s'en suit que $\frac{dN}{dp}$ a, pour des pressions très faibles, une valeur positive considérable convergeant lentement à zéro pour des pressions au - dessus d'une atmosphère.

On a fait remarquer le fait intéressant que la marche du pouvoir fluorescent des gaz ou des substances fluorescentes en solutions diluées avec la variation de la pression ou de la concentration, démontrée par les expériences de M. Perrin, est analogue à celle de $\frac{dN}{dp}$.

## Sur l'élément du troisième ordre d'une courbe et d'une surface dans l'espace projectif.

Par Ed. Čech.

I. Soit $O$ un point da la courbe $C$, $t$ la tangente, $\omega$ le plan osculateur, $s$ l'arc, $\varrho$ le rayon de courbure, $T$ le rayon de torsion en ce point; $P$ un point sur $t$, $p$ une droite du faisceau $(O, \omega)$, $\pi$ un plan passant par la droite $t$. J'appelle la trilinéarité $\Theta$ definie par l'équation

$$\frac{3\varrho}{OP} - \frac{3}{tg(t,p)} - \frac{\varrho}{T\,tg(\omega,\pi)} + \frac{d\varrho}{ds} = 0$$

trilinéarité caractéristique de l'élément de la courbe $C$, et la trilinéarité $\Theta'$ definie par l'équation

$$\frac{\varrho}{OP} - \frac{3}{tg(t,p)} - \frac{3\varrho}{T\,tg(\omega,\pi)} + T\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{T}\right) = 0$$

la trilinéarité caractéristique de l'élément de la développable $I$ respective. La trilinéarité $\Theta$ signifie que $p$ et $P$ sont pôle et polaire par rapport à la conique osculatrice de la projection de $C$ sur $\omega$, le centre de projection se trouvant sur $\pi$; la signification de $\Theta'$ est réciproque. Si l'on élimine $p$ des équations de $\Theta$ et de $\Theta'$, on obtient l'homographie entre les points $P$ de $t$ et les plans $\pi$ du faisceau $(t)$; le lieu des droites de tous les faisceaux $(P, \pi)$ est la congruence linéaire tangente de $C$. Si, en second lieu, on élimine de ces deux équations $P$, on obtient l'homographie entre les droites $p$ du faisceau $(O, \omega)$ et les plans $\pi$ du faisceau $(t)$; $\pi$ est le plan polaire de la droite $p$ par rapport au cône quadratique osculateur appartenant au cône par lequel $C$ est projetée du point $O$. On obtient des énoncés réciproques en éliminant $\pi$.

II. Soient $\omega$ le plan tangent, $\alpha$, $\beta$ les tangentes asymptotiques, $t_1$, $t_2$, $t_3$ les „tangentes à osculation quadrique" de Darboux en un point $O$ d'une surface $\Pi$; $P$ un point du plan $\omega$, $Q$ la quadrique-lieu des coniques osculatrices des courbes d'intersection de $\Pi$ par les plans du faisceau $OP$, $\pi$ le plan polaire de $P$ par rapport à $Q$. J'appelle $\Sigma_1$ la correspondance entre $P$ et $\pi$; c'est, en général, une correspondance de Cremona cubique. J'appelle $\Sigma_{-3}$ une seconde correspondance, considérée par M. Segre 1908 (Lincei Rendiconti). Au faisceau de plans ayant pour axe $p$ (qui passe par $O$) correspondent, dans $\Sigma_1$, $\Sigma_{-3}$ des cubiques $C_1$, $C_{-3}$. Ces courbes possèdent des points d'inflexion communs, aux points d'intersection de $t_1$, $t_2$, $t_3$ avec la droite $q$, polaire réciproque de $p$ par rapport à la quadrique de Lie au point $O$, il s'ensuit que les deux courbes sont homologiques, $O$ et $q$ étant le centre et l'axe de l'homologie; l'invariant de cette homologie est $-3$. Si $\Pi$ est une surface réglée, ces résultats se modifient: $C_1$, $C_{-3}$ se réduisent à des coniques touchant, au point $O$, une tangente asymptotique, et en un point de la génératrice, la droite $q$. La courbure de $C_1$ au point $O$ est égale à $-\frac{2}{3}$ de la courbure de la courbe asymptotique; il en résulte que les tangentes de Darboux-Segre sont les droites joignant $O$ aux points d'inflexion d'une cubique quelconque ayant le point double $O$ et dont chaque branche a, avec la courbe asymptotique, un contact du 2$^e$ ordre.

III. Si $\Pi$ est une surface réglée, on peut considérer les correspondances $\Sigma_1$, $\Sigma_{-3}$ en tout point d'une génératrice $t$ et obtenir de cette manière par extension des transformations de Cremona cubiques de l'espace. À un faisceau de plans d'axe $p$ correspondent, en ce cas, dans ces transformations, en général, des cubiques $C_1$, $C_{-3}$, pour lesquelles $t$ et la polaire réciproque de $p$ par rapport à l'hyperboloïde osculateur sont des bisécantes. Mais si $p$ appartient à la congruence linéaire osculatrice, $C_1$, $C_{-3}$ se réduisent à des droites qui lui appartiennent. La droite $r_1$ ($r_{-3}$) appartenant au système de génératrices d'une quadrique, déterminé par $t$, $p$, $C_1$ ($t$, $p$, $C_{-3}$) et conjuguée harmonique à $t$ par rapport à $p$, $C_1$ ($p$, $C_{-3}$), appartient à l'hyperboloïde osculateur.

## Contribution à la théorie mathématique de l'assurance sociale.

Par E. Schönbaum.

L'article contient la solution du problème suivant: étant donné un ensemble d'assurés, déterminer, indépendamment de l'âge, du sexe, de l'état civil, de l'état des familles, les primes pour une nouvelle espèce d'assurance de rentes temporaires d'invalidité sur deux têtes, (x), (y), payables à partir de l'invalidité de l'une (x) des deux personnes jusqu'au premier décès survenant dans le groupe ($x$) ($y$). Ce problème s'est présenté dans la loi de l'assurance sociale des employés privés; il est résolu par la méthode collective conduisant a la formule:

$$\bar{a}^{ai}_{x(z)} = \int_0^{\omega_a - x} l^{aa}_{x+t}\, l_{x+t}\, v^t \Bigg[ {}^{18}a^a_{x+t(z)} - \frac{1}{l^i_{x+t}} \int_0^{\omega_i - x - t} l^i_{x+t+\tau}\, \mu^i_{x+t+\tau}\, v^\tau\, {}^{18}\bar{a}^i_{x+t+\tau(z)}\, dx \Bigg] dt$$

$${}^{18}a^i_{x(z)} = \frac{1}{L^i_x} \int_0^{18} L^i_{x,z}\, {}^{18}a_{z_i}\, dz.$$

Le problème analogue est résolu pour les rentes temporaires d'activité sur deux têtes, payables jusqu'au premier décès survenant dans le groupe ($x$) ($y$), mais, au plus tard, jusqu'au cas d'invalidité du valide ($x$).

---

## Calcul des lentilles.

Par V. Vojtěch.

On donne une méthode de calcul des lentilles et on fait voir, en s'appuyant sur des exemples pratiques et des calculs numériques, quelle est la position des points cardinaux et des pupilles, soit dans le cas des lentilles simples, soit dans celui des systèmes composés, symmétriques ou non.

---