Vladimír Kořínek

Emmy Noetherová [nekrolog]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 1, D1--D6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123691

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Emmy Noetherová.

Vladimír Kořínek, Praha.

14. dubna letošního roku zemřela v Americe po operaci Emmy Noetherová ve věku 53 let. Tím odchází ze současného matematického světa jedna z nejvýznamnějších osobností, osobnost velmi pozoruhodná. Zvláštnost zjevu Emmy Noetherové spočívá nejen v tom, že jakožto žena patří beze sporu mezi přední současné matematiky světové, nýbrž především v obsahu a svéráznosti jejího matematického díla. Narodila se v Erlangách[1]) 23. března 1882, jsouc dcerou známého matematika Maxe Noethera. Po příkladu svého otce věnovala se studiu matematiky. Roku 1907 promovala v Erlangách. Za války přišla do Götting, kde se roku 1919 habilitovala a krátce potom dostala učebný příkaz. V Göttingách působila až do léta 1933.

První mně známá práce Noetherové jest její disertace.[2]) V ní se zabývá Noetherová teorií invariantů kvadratických forem v duchu Gordanově. Jde při tom o stanovení úplného systému forem pro obecnou ternární bikvadratickou formu. Noetherová řeší tuto úlohu jen částečně, neboť určuje jen tak řečený relativně

---

[1]) Životopisná data byla vzata z článku: B. L. van der Waerden: Nachruf auf Emmy Noether, Math. Ann. **111**, 1935, 469—476. K tomuto článku jest připojena i bibliografie prací Noetherové. Pokud jsem zjistil, jest tato bibliografie úplná až na to, že v ní schází disertace Noetherové uvedená v poznámce [2]). Ve svém článku uvádím jen velké práce Noetherové, jinak odkazuji čtenáře na tuto bibliografii. Hermann Weyl napsal rovněž posmrtnou vzpomínku na Noetherovou do amerického časopisu Scripta Mathematica, **3**. vol., July 1935. Tento článek byl mně bohužel nepřístupný.

[2]) Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form. J. f. r. u. a. Math., **134**, 1908, 23—90. Van der Waerden uvádí ve zmíněné posmrtné vzpomínce za její disertaci pojednání pozdější: Zur Invariantentheorie der Formen von *n* Variablen, J. f. r. u. a. Math. **139**, 1911, 118—154, což však spočívá na omylu; neboť právě v pojednání jím mylně za disertaci pokládaném Noetherová sama označuje na str. 121 hoření pojednání za disertaci, což opakuje i ve stručném výtahu z této práce: Zur Invariantentheorie der Formen von *n* Variablen, Jahresb. d. D. Math. Ver. **19**, 1910, 101—104, na str. 102. Van der Waerden pojednání z roku 1908 úplně přehlédl, neboť je neuvádí ani v připojené bibliografii.

úplný systém forem. Užívá přitom metod Gordanových a postupuje ryze početně, tedy způsobem, který později tak potírala. Teorií invariantů kvadratických forem zabývá se Noetherová ještě později v několika pojednáních. V nich, ačkoliv její postup jest stále ještě početní, objevuje se již jeden rys pro Noetherovou tak význačný, úsilí po největší obecnosti výsledků. Za války uveřejňuje dvě práce o diferenciálních invariantech. Záhy po válce se však již obrací k první z obou skupin problémů moderní algebry, v nichž spočívá vlastní význam její badatelské práce. Obě tyto skupiny problémů: obecná teorie ideálů a teorie nekomutativních systémů rozrostly se jí pod rukama v celé rozsáhlé teorie a v nich se definitivně projevuje její osobitost, a to jak ve formulaci problémů, tak v metodách jejich řešení.

V teorii ideálů vzala si Noetherová za úkol přenésti teorii o rozkladu ideálů v primideály, která platí v maximálních řádech algebraických těles, na obecné komutativní okruhy. Aby se jí to podařilo, byla nucena provésti dvě zevšeobecnění. Požadavek, aby každý ideál dal se rozložiti v součin primideálů, byl totiž pro obecné okruhy v dvojím směru příliš silný. Jednak primideály jakožto základní kameny pro vybudování libovolného ideálu byly pojmem příliš speciálním a bylo nutno je nahraditi obecnějším pojmem primárních ideálů, jednak se ukázalo, že nelze z primárních ideálů vytvořit libovolný ideál jakožto součin. Bylo nutno součin nahraditi nejmenším společným násobkem ideálů čili jejich průnikem, hledíme-li na ideály jakožto na množiny. Noetherové se podařilo dokázati větu, že každý ideál v okruhu dá se vyjádřiti jakožto nejmenší společný násobek (průnik) konečného počtu primárních ideálů. Při tom o okruhu bylo nutno jen učiniti předpoklad o řetězci dělitelů (Teilerkettensatz), t. j. předpokládati, že každá posloupnost ideálů, v níž libovolný ideál jest dělitelem předcházejícího (řetězec dělitelů, Teilerkette), má jen konečný počet členů od sebe různých. Tento výsledek byl znám již před tím pro okruhy polynomů, kdež se k jeho důkazu používalo té vlastnosti, že každý ideál těchto okruhů má konečnou basi. Jest právě velkým výkonem Noetherové, že poznala, že předpoklad o konečné basi ideálů jest totožný s větou o řetězci dělitelů, a že se daleko lépe hodí pro důkazy v abstraktních okruzích. Další rozvoj teorie ideálů ukázal velký význam pojmu „předpoklad (věta) o řetězci dělitelů" a analogicky Noetherovou utvořeného pojmu „předpoklad (věta) o řetězci násobků". Noetherová vyšetřovala dále, jaké předpoklady musí splňovati okruh, aby v něm platil rozklad ideálů v součin primideálů, a našla v podstatě toto: Platí-li v okruhu mimo předpoklad o řetězci dělitelů ještě předpoklad o řetězci násobků, které jsou všechny děliteli nějakého ideálu, a existuje-li v okruhu jednotkový element, pak se dá každý ideál jednoznačně vyjádřiti jakožto součin primárních ideálů. Jedná-li se dále při tom ještě o obor integrity, který jest celistvě uzavřený ve svém podílovém tělese (ganz abgeschlossen), pak dá se každý ideál rozložiti v součin primideálů.[3]) Při aplikaci této abstraktní teorie ideálů na teorii ideálů v okruzích polynomů přišla Noetherová na myšlenku vybudovati na teorii ideálů teorii eliminace. Uveřejnila o tomto předmětě několik pojednání, když však k definitivní formulaci současně s ní dospěl van der Waerden, přenechala mu její uveřejnění.

Druhou velkou skupinou problémů z abstraktní algebry, ke které se Noetherová po teorii ideálů obrátila, byla teorie nekomutativních systémů. Teorie algeber (hyperkomplexních čísel) byla již od začátku 20. století předmětem četných prací amerických matematiků. Jejich výsledky shrnul v knihu Dickson. Tato kniha vyšla pod názvem Algebren und ihre Zahlentheorie roku 1927 v německém překladě. Teprve tento překlad upozornil větší měrou na tuto teorii evropské matematiky a tak již téhož roku podává Artin nové, daleko kratší a obecnější odvození hlavních vět o struktuře algeber. Za takového stavu věci ujala se práce v tomto oboru Noetherová. Brzo přišla na to, že celou teorii algeber lze velmi jednoduše a obecně vybudovati pomocí pojmu modulu, zvláště pomocí jistého druhu modulů, které první definovala a nazvala representačními moduly (Darstellungsmoduln). Tím se celá teorie stala nejen velmi stručnou a přehlednou, nýbrž dala se i stejným způsobem vybudovati tak zvaná teorie representace algeber pomocí matic (Darstellungstheorie), t. j. dala se rozřešiti úloha, najíti k dané algebře všechny matiční okruhy s elementy z daného, po případě nekomutativního, tělesa, které jsou s danou algebrou isomorfní. Mnoho vět z této teorie podařilo se jí při tom dokázati pro nekomutativní systémy daleko obecnější, než jsou systémy hyperkomplexních čísel.[4]) Kdežto v teorii ideálů nahradila ve svých vyšetřováních vyjádření ideálů pomocí konečné base větou o řetězci dělitelů, zde právě naopak vydatně použila vyjádření konečného modulu pomocí jeho base.

Noetherová pracovala i po roce 1929 v tomto oboru neúnavně dále. Tak záhy objevila to, co jest podstatného na způsobu, kterým Dickson sestrojil jistý druh nekomutativních těles po něm nazvaných, a stvořila tak pojem vnitřního součinu (verschränktes

---

[3]) Tuto teorii ideálů uveřejnila Noetherová ve dvou pojednáních: Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann., **83**, 1921, 24—66, a Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann. **96**, 1927, 26—61.

[4]) Tato svá vyšetřování uložila Noetherová ve velkém pojednání Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, Math. Zsch., **30**, **1929**, 641—692.

Produkt).[5]) Celá věc spočívala v tom, že ke zvolenému Galoisovu nadtělesu konečného stupně adjungujeme elementy jeho Galoisovy grupy při vhodné definici sčítání a násobení mezi elementy grupy a elementy tělesa. Tím dostaneme jednoduchou algebru speciálního typu a za jistých podmínek, které rovněž Noetherová nalezla, nekomutativní těleso Dicksonova typu. Tuto teorii Noetherové, která má základní důležitost při studiu struktury nekomutativních těles, uveřejnil Hasse v jednom svém pojednání.[6]) Pomocí vnitřního součinu podařilo se Noetherové společně s Hassem a R. Brauerem rozřešiti tak zvaný problém nekomutativních těles, t. j. úlohu stanoviti všechna nekomutativní tělesa konečné hodnosti nad daným algebraickým číselným tělesem konečného stupně jakožto centrem. Ukázali totiž,[7]) že každé takové nekomutativní těleso jest typu Dicksonova a dá se tedy vytvořiti vnitřním součinem. Dále se jí podařilo při tomto studiu struktury nekomutativních těles zevšeobecniti Galoisovu teorii z komutativních těles na tělesa nekomutativní a přitom výsledky týkající se struktury nekomutativních těles formulovati co nejobecněji.[8]) V poslední době, krátce před svým odchodem z Německa, obrátila se ke studiu aritmetiky jednoduchých algeber. První velmi zajímavé výsledky v tomto směru, kterých docílila tím, že současně použila modulů i vnitřních součinů, uveřejnila rok před svou smrtí.[9]) Pro ni nepříznivý vývoj událostí v Německu a náhlá její smrt zabránily jí dosáhnouti na tomto poli definitivních ucelených výsledků.

Založením a vybudováním abstraktní teorie ideálů a velkým podílem, kterým přispěla ke stavbě teorie nekomutativních systémů, zapsala se Noetherová nesmazatelně do dějin moderní algebry. Zároveň lze viděti i na tomto stručném vylíčení jejího díla, v čem spočívá osobitost jejího matematického myšlení. Noetherová snažila se vždy nalézti ty nejvšeobecnější podmínky, za kterých platí věty určité matematické teorie. Aby toho dosáhla, rozkládala pojmy, které se v oné teorii vyskytovaly, na řadu pojmů

---

[5]) Zavádím pro pojem „verschränktes Produkt“ název „vnitřní součin“ ve shodě s názvem „produit intérieur“, který zavedl pro francouzštinu C. Chevalley. Hasse v pojednání l. c. [6]) napsaném anglicky užívá názvu „crossed product“.

[6]) Helmut Hasse: Theory of Cyclic Algebras over an Algebraic Number Field. Trans. Am. Math. Soc. **34**, 1932, 171—214.

[7]) Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, J. f. r. u. a. Math. **167**, 1932, 399—404.

[8]) Tato vyšetřování obsahuje druhé její velké pojednání z teorie nekomutativních systémů: Nichtkommutative Algebra, Math. Zschr. **37**, 1933, 514—541.

[9]) Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. Actualités scientifiques et industrielles, Nro. **148**, 1934. V bibliografii van der Waerdenově mylně uveden rok 1935 za rok uveřejnění.

jednodušších, abstraktnějších a obecnějších. Pro takto nově utvořené pojmy vybudovala novou teorii, daleko obecnější než teorie původní, z níž plynuly věty původní teorie jakožto speciální případy. Tím získala nejen velké zevšeobecnění výsledků, nýbrž i celá teorie stala se jednodušší a průhlednější. Při tom zavrhovala jakýkoliv početní aparát, pracovala jen s pojmy a jich vzájemnými logickými vztahy. Dobře to vystihl van der Waerden, když vyjádřil hlavní zásadu, kterou se při svém badání řídila, takto:[10] Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind. Pěkně lze sledovati tuto její metodu na obecné teorii ideálů. Aby zevšeobecnila větu o rozkladu ideálu v součin primideálů, nahradila pojem primideálu několika pojmy obecnějšími, méně restriktivními, jako primární ideál, ireducibilní ideál, jichž jest primideál speciálním případem. Podobně nahradila součin průnikem a formulovala řadu předpokladů obecně a abstraktně. Takovou formulací jest na příklad věta o řetězci dělitelů. Tím dostala teorii o rozkladu ideálů v obecných komutativních okruzích a zároveň našla úplně obecně ty předpoklady, které musí okruh splňovati, aby v něm platil speciální rozklad ideálů v součin primideálů. Tento její ryze abstraktní a logický postup, odmítající veškerý početní aparát, sotva by šel použíti ve všech odvětvích matematiky, ale jest jisto, že právě v některých moderních matematických disciplinách, jako jest moderní algebra, teorie množin neb topologie, jen tento postup vede k opravdu významným objevům. A jest pozoruhodné, že to byla právě žena, která zdůrazňovala význam této abstraktní metody, a která jí s takovým úspěchem používala, neboť z dějin matematiky lze viděti, že abstrakce patří k nejtěžším věcem v lidském myšlení.

Osobně byla Noetherová žena cele soustředěná na svou práci, jíž byla plně oddána celým svým ohnivým temperamentem. O vnější hmotné podmínky svého života, které byly velmi skrovné, příliš nedbala a žila jen pro matematiku. V Göttingách shromáždila kolem sebe celý kruh mladých algebraiků, kteří spolu s ní pracovali na problémech moderní algebry, a rozdávala štědře z nepřeberné zásoby svých badatelských myšlenek. Předhitlerovské Německo mělo pro tak skvělý talent jen učební příkaz. Třetí říše pak přirozeně nemohla strpět na universitě ženu a k tomu ještě židovku. Proto jí byla v létě 1933 odňata venia legendi a Noetherová byla nucena opustiti Německo. Dostala místo na universitě v Bryn Mawr v Americe. Ačkoliv se tím její hmotné poměry

[10]) L. c. [1]), str. 469.

zlepšily, Noetherová nemohla si na Ameriku zvyknout a velmi se jí stýskalo po Göttingách. Neodolala, aby alespoň o prázdninách 1934 nenavštívila Německo, které se k ní tak špatně zachovalo. A než tyto rány přebolely, Noetherová umírá. Odchází s ní dobrý člověk a velký matematik.

Loxodromická geometrie.

(Výtah z disertace.)

Ludmila Illingerová, Praha.

(Došlo 20. května 1935.)

Loxodromy jsou čáry na rotační ploše, které svírají s poledníky plochy konstantní úhel φ. T. zv. Merkatorovou projekcí plochy na rovinu přejdou loxodromy v přímky. Necháme-li v parametrických rovnicích plochy proměnný úhel, t. j. úhel rotace, probíhati všechny hodnoty, nejen do 2π, zobrazí se plocha obecně do celé roviny rozdělené v rovnoběžné pásy, 2π široké. Hranice těchto pásů představují týž poledník plochy. Pro zjednodušení budeme studovati jen jeden takový pás. Aby toto zjednodušení nebylo na újmu obecnosti, musíme všechny pásy, do kterých se plocha zobrazila, zobraziti na tento zvolený pás. Poněvadž každý bod plochy zobrazuje se současně do všech pásů, má jednu souřadnici určitou, kdežto druhá jest dána až na násobek 2π $[P_1\,(x_1, y_1 + 2{}^1k\pi)]$. Každá loxodroma v našem pásu přejde v systém rovnoběžných, stejně od sebe vzdálených úseček. Dvěma body $P_1\,(x_1, y_1 + 2{}^1k\pi)$, $P_2\,(x_2, y_2 + 2{}^2k\pi)$ prochází nekonečně mnoho loxodrom; jejich společná rovnice jest $y - y_1 - 2{}^1k\pi = \dfrac{y_2 - y_1 + 2\pi\,({}^2k - {}^1k)}{x_2 - x_1}$, $(x - x_1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Výrazem $2\pi\,({}^1k - {}^2k)$, místo něhož zavedeme Π_{12}, jest každá loxodroma, procházející dvěma body, pevně stanovena. Tangens úhlu, který každá loxodroma svírá s poledníky plochy, jest $\operatorname{tg}\varphi_m = \dfrac{y_2 - y_1 + 2\pi\,({}^2k - {}^1k)}{x_2 - x_1} =$ $= \dfrac{y_2 - y_1 + {}^m\Pi_{21}}{x_2 - x_1}$.

Obrazce vzniklé z loxodrom můžeme studovati jako obdobné útvary v rovině. Velmi zajímavou částí loxodromické geometrie jest loxodromická trigonometrie, která studuje vztahy mezi stranami a úhly loxodromického trojúhelníka, t. j. obrazce vzniklého ze tří loxodrom. Poněvadž uvažované zobrazení plochy na rovinu je konformní, jest součet úhlů každého loxodromického trojúhel-