Jan Sobotka

O čtyřúhelníku ploše 2. stupně opsaném

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 33 (1904), No. 1, 2--9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123666`

# O čtyřúhelníku ploše 2. stupně opsaném.

Napsal

**Jan Sobotka,**
professor české vysoké školy technické v Brně.

1. Rozeznáváme dva druhy čtyřúhelníků, jež lze ploše 2. stupně opsati. Při prvním druhu leží čtyři body, v nichž se strany čtyřúhelníka plochy dotýkají v jedné rovině, kdežto při druhém druhu tomu není. Tomuto druhému druhu věnoval *A. Mannheim* v „Bulletin de la Société mathématique de France" r. 1897 (Note à propos d'un théorème connu de géométrie) pojednání, v němž čtyřúhelník takový tím blíže charakterisuje, že nejprvé plochu 2. stupně převádí kollineací v plochu kulovou a tuto pak inversí v rovinu.

Zde provedeme úvahy bezprostředně na dané ploše 2. stupně P, čímž dospějeme krátkou cestou k vlastnostem čtyřúhelníků jí opsaných.

Buďtež $l$, $m$ dvě přímky mimosměrné, které nechť se plochy P dotýkají v bodech $L$, $M$ a dále budiž $n$ jakákoliv transversála přímek $l$, $m$, dotýkající se plochy P v bodě $N$. Rovina $LMN$ nechť protne P v kuželosečce $u$. Kuželosečka ta určuje s přímkami $l$, $m$ plochu zborcenou 2. stupně R, která se vytvoří svazky rovin, jichž osami jsou přímky $l$, $m$ a které perspektivně vztahujeme ke kuželosečce $u$. Plochy P, R se dotýkají podél kuželosečky společné $u$, jelikož mají ve třech bodech $L$, $M$, $N$ na ní ležících společné roviny tečné.

Z toho plyne, že přímky na R, které s $n$ náleží k téže soustavě, jsou transversálami přímek $l$, $m$ dotýkajícími se plochy P v bodech na křivce $u$ ležících. Libovolné dvě z těchto transversál tvoří tedy s $l$ a $m$ *čtyřúhelník prvého druhu.*

Považujme dále průsečík $l . n$ za vrchol kužele ploše P opsaného. Kužel ten protne $m$ ve dvou bodech, jichž spojnice s vrcholem kužele jest přímka $n$ a mimo ni další přímka $p$, která jest tedy rovněž transversálou přímek $l$, $m$ dotýkající se plochy P v bodě $P$. Přímka $p$ nemůže náležeti ploše R, poněvadž tato z bodu $l . n$ již dvě přímky $l$ a $n$ vysílá. Proto také bod $P$ neleží v rovině $LMN$. Tvoří tedy přímky $l$, $m$, $n$, $p$ *čtyřúhelník druhého druhu.*

Rovina $LMP$ protne P v kuželosečce $v$ a útvary $v$, $l$, $m$ určují způsobem prve vytčeným plochu mimosměrek 2. stupně S dotýkající se plochy P podél $v$. Přímky na S, které s $p$ náleží k téže soustavě přímek povrchových, jsou tedy dalšími transversálami přímek $l$, $m$ dotýkajícími se plochy P. Tím jsou všechny možné transversály přímek $l$, $m$ dotýkající se plochy P vyčerpány, jelikož každým bodem na $l$ rovněž tak jako každým bodem na $m$ jenom dvě takové transversály jsou možny, z nichž jedna na R a jedna na S připadá.

Obdržíme takto výsledek:

*Všechny transversály dvou tečen $l$, $m$ plochy 2. stupně dotýkající se této plochy, tvoří dvě soustavy přímek, z nichž každá vyplňuje jednu plochu zborcenou 2. stupně; libovolné dvě transversály, téže soustavě náležející, tvoří s $l$ a $m$ čtyřúhelník prvního druhu, libovolná přímka soustavy jedné a libovolná přímka soustavy druhé tvoří s $l$ a $m$ čtyřúhelník druhého druhu.*

2. Plochy R, S mají přímky $l$, $m$ společny, protínají se proto v dalších dvou přímkách. Značí-li $Q_\mu$ průsečík přímky $m$ s rovinou tečnou plochy P v bodě $L$, jest $q_\lambda = LQ_\mu$ jednou z nich a značí-li $Q_\lambda$ průsečík přímky $l$ s rovinou tečnou plochy P v bodě $M$, jest $q_\mu = MQ_\lambda$ přímkou druhou. Přímky $LM$, $Q_\lambda Q_\mu$ jsou polárně združeny vzhledem ku všem třem plochám R, S, P.

Přímky ploch R, S, které procházejí týmž bodem $L_1$ na $l$ a od přímky $l$ se různí, můžeme si též tak odvoditi, že protneme P rovinou $L_1 m$ v kuželosečce $s$; přímky zmíněné jsou tečnami z $L_1$ ku $s$. Buďtež dále $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ body dotyku těchto tečen, z nichž leží jeden, třeba $\mathfrak{U}$ na $u$ a druhý $\mathfrak{V}$ na $v$. Přímka $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ nechť protne $m$ v bodě $M_0$, $ML_1$ v bodě $L_0$. Patrně jsou body $M_0$, $L_0$ harmonicky položeny vzhledem k bodům $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$. Položíme-li těmito body roviny přímkou $LM$ jdoucí, obdržíme větu:

*Soustavy transversál ku přímkám $l$, $m$ dotýkajících se plochy* P, *dotýkají se této ve dvou kuželosečkách $u$, $v$, jejichž roviny jsou od sebe přímkami $l$, $m$ harmonicky odděleny.*

Dále máme větu:

*V čtyřúhelníku ploše 2. stupně opsaném, jehož body dotyku s plochou neleží v téže rovině, oddělují vrcholy jedné strany její bod dotyku harmonicky od bodu, v němž strana ta proťata jest rovinou položenou body dotyčnými ostatních tří stran čtyřúhelníka.*

Obě věty vyslovil též Mannheim na místě uvedeném.

Buďtež $U$, $V$ vrcholy kuželů dotýkajících se plochy P podél $u$, resp. $v$; vrcholy ty leží na přímce $Q_\lambda Q_\mu$. Jelikož prvý kužel též plochy R se podél $u$ dotýká, jest rovina kuželosečky $u$ polárnou rovinou bodu $U$ vzhledem ku R a proto jsou $U$ a průsečík $U_1$ této roviny polárné s $Q_\lambda Q_\mu$ harmonicky od sebe odděleny body $Q_\lambda$, $Q_\mu$. Z toho plyne, že rovina $LMU$ obsahuje kuželosečku $v$. Máme tedy důsledek:

*Roviny kuželoseček $u$, $v$ jsou k sobě sdruženy vzhledem ke všem třem plochám* P, R, S.

3. Je-li P plochou kulovou, pak jsou $u$, $v$ dvěma kružnicemi orthogonálně se protínajícími, R a S jsou dva zborcené hyperboloidy rotační. Proto protínají všechny přímky prve vytčených soustav na R a S kružnice $u$, $v$ pod stejnými úhly.

Značí-li $ABCD$ čtyřúhelník utvořený ze čtyř přímek ležících na rotačním hyperboloidu, který má přímku $o$ za osu a myslíme-li si strany čtyřúhelníka toho uspořádány ve dva páry po sobě jdoucích stran, na př. tak, že strany jednoho páru se protínají v $A$, strany druhého v $C$, načež položíme jedním z ostatních dvou vrcholů, na př. $B$, rovinu normálnou k ose $o$, protne tato přímku $AD$ v $B_1$, přímku $CD$ v $B_2$ tak, že $DB_1 = DB_2$. Z toho vychází, že ve zborceném čtyřúhelníku na rotačním hyperboloidu ležícím rozdíl, resp. součet dvou po sobě jdoucích stran rovná se rozdílu, resp. součtu ostatních dvou stran, podle toho, zdali rovina $Ao$ půlí vnitřní neb vnější úhel čtyřúhelníka při $A$. Promítneme-li pravoúhelně do roviny normálné ku $o$, seznáme správnost věty známé o čtyřúhelníku z tečen kružnice utvořeném a to pro každý jeho tvar.

Tím obdržíme *konstrukci koule vepsané danému čtyřúhelníku zborcenému* $ABCD$ ve formě nejjednodušší.

4. Je-li

$$|AB - AD| = |BC - CD| \quad \text{nebo} \quad |AB + AD| = |BC + CD|$$

jest čtyřúhelník $ABCD$ kouli opsaný.

Rozpůlíme úhly při $A$ a $C$, a to v prvém případě vnitřní, v druhém zevnitřní úhly čtyřúhelníka daného a položíme každou přímkou půlící rovinu normálnou k rovině úhlu; rovina ta jest symmetrálou úhlu toho. Takto nabyté dvě roviny protínají se v ose $o$ rotačního hyperboloidu položeného čtyřúhelníkem $ABCD$. Osa $o$ jest zároveň jedním průměrem koule žádané.

Každá rovina, kterou položíme kolmo ku $o$, protíná čtyřúhelník ve čtyřech bodech ležících na kružnici. Koule, která rotačního hyperboloidu se dotýká podél této kružnice, vyhovuje naší úloze. Jest tudíž každý bod na $o$ od stran čtyřúhelníka stejně vzdálen a může býti považován za střed koule čtyřúhelníku vepsané. Konečně seznáváme, že se roviny souměrnosti vnitřních úhlů čtyřúhelníka prvního druhu kouli opsaného v jednom průměru koule protínají.

5. Čtyřúhelník druhého druhu kouli opsaný lze libovolně zvoliti.

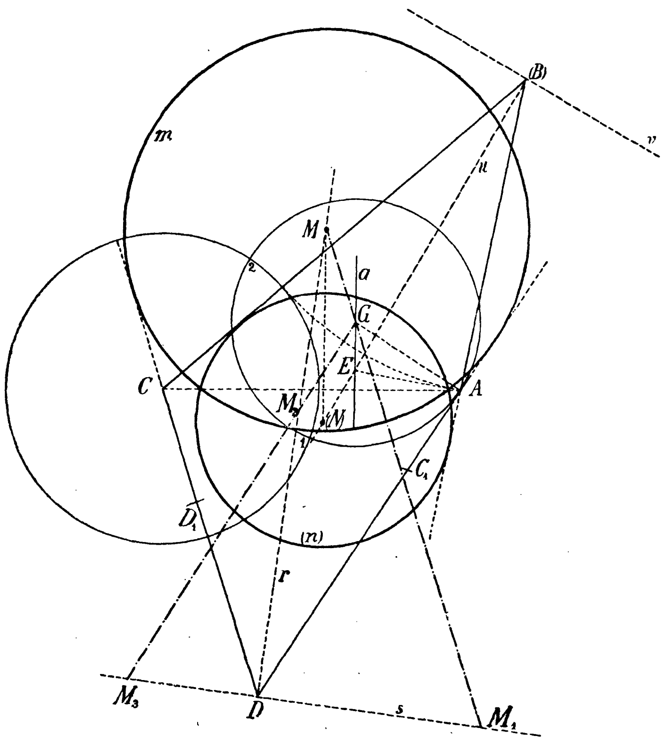
Ukážeme zde ještě, kterak pro takový čtyřúhelník zborcený $ABCD$ můžeme sestrojiti kouli vepsanou (viz obr.).

Roviny souměrnosti po sobě následujících stran čtyřúhelníka a jich prodloužení protínají se osmkrát po čtyřech v jednom bodě, který je středem koule, jež úloze činí zadost. Konstrukce se značně zjednoduší a nabude zajímavosti, redukujeme-li ji na konstrukce v jediné rovině prováděné.

K tomu cíli sklopme třeba rovinu $ABC$ kolem přímky $AC$ do roviny $ACD$, čímž $B$ přejde do polohy $(B)$. Budiž K jedna z koulí hledaných, jejíž body dotyku s přímkami $AB$, $BC$, $AD$, $CD$ označíme posloupně písmeny $T_{\alpha\beta}$, $T_{\beta\gamma}$, $T_{\alpha\delta}$, $T_{\gamma\delta}$.

Koule K dotýká se podél kružnice na ní ležící v rovině $T_{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta}$ obsažené rotačního hyperboloidu R, který obsahuje přímky $AB$, $BC$, $AD$ a proto rovinu $ACD$ mimo $AD$ ještě v jedné přímce $CC_1$ protíná. Při tom značíme $C_1$ společný bod přímek $AD$, $CC_1$. Rovina meridiánová plochy R normálná ku rovině $ABC$ protíná rovinu tuto v přímce $u$ půlící úhel přímek $AB$, $BC$.

Nyní rozeznáváme dva případy dle toho, půlí-li $u$ úhel $ABC$ nebo jeho úhel vedlejší. Mějme nejprvé první případ na




zřeteli. Myslíme-li si bodem $A$ normálnou rovinu k ose hyperboloidu rotačního R, poznáváme, že

$$|AB - BC| = |AC_1 - CC_1|.$$

Následkem toho leží $C_1$ na hyperbole $h$ mající body $A$, $C$ za ohniska a procházející bodem $(B)$.

Obdobně jest pro druhý případ, když přímka $u$ půlí úhel $ABC$ vedlejší

$$AB + BC = AC_1 + C_1C$$

a bod $C_1$ leží na ellipse $e$ s hyperbolou $h$ konfokální a rovněž bodem $(B)$ procházející.

Kružnice $m$, v níž hledaná koule K protíná rovinu $ACD$, dotýká se netoliko přímek $AD$, $CD$, nýbrž i přímky $CC_1$, ležíc, jak víme, na hyperboloidu R kouli opsaném.

Položme dále přímkami $AB$, $BC$, $CD$ rotační hyperboloid S, zde opět ten, jehož rovina meridiánová kolmá ku $ABC$ jest zároveň rovinou meridiánovou pro R a vyhledejme jako prve přímku $AD_1$, v níž rovina $ADC$ protíná mimo přímku $DC$ hyperboloid S. Bod $D_1$ budiž opět průsečíkem přímek $DC$, $AD_1$. Poněvadž R a S mají uvedenou rovinu meridiánovou společnou, proto leží body $C_1$, $D_1$ buď oba na kuželosečce $h$, anebo oba na kuželosečce $e$, a kružnice $m$ jest vepsána čtyřúhelníku $AC_1CD_1$, čímž jest více než s dostatek stanovena. Označíme-li střed její $M$, jsou $MD$, $MC_1$, $MD_1$ tři průměry její půlící úhly příslušné ve vytčeném čtyřúhelníku.

Dále jest $MC_1$ stopou jedné roviny meridiánové pro R $MD_1$ stopou jedné roviny meridiánové pro S v rovině $ACD$, z čehož následuje, že tyto stopy se dotýkají kuželosečky $h$, resp. $e$ v bodech $C_1$, $D_1$. Jelikož přímky $AD$, $CD$ kuželosečku $h$, resp. $v$ ve čtyrech bodech $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$ protínají, jsme vedeni ku čtyřem bodům $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ jakožto středům kružnic, v nichž jsou protnuty ony čtyři z hledaných ploch kulových, jejichž středy leží ve společném meridiánu ploch R a S.

Tvoří proto tečny v bodech $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$ této kuželosečky úplný čtyřstran, jehož dva páry protilehlých vrcholů utvořeny jsou z bodů $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, kdežto pár třetí $G$, $H$ sestává z pólů přímek $DA$, $DC$ vzhledem ke kuželosečce vytčené.

Jelikož $DA$, $DC$ jsou paprsky fokálními, leží body $G$, $H$ na přímkách řídících kuželosečky.

Dvě úhlopříčny čtyřstranu jsou symmetrály přímek $DA$, $DC$; úhlopříčna třetí jest polárou bodu $D$ vzhledem k naší kuželosečce. Tytéž úhlopříčny má též úplný čtyřúhelník $C_1C_2D_1D_2$.

Z toho vyplývají mimochodem následující vlastnosti kuželosečky:

„Procházejí-li dvě strany protější v úplném čtyřúhelníku kuželosečce vepsaném ohnisky jejími, pak půlí úhlopříčny čtyřúhelníka, které procházejí průsečíkem $D$ oněch dvou stran, úhly těmito uzavřené; tečny kuželosečky ve vrcholích čtyřúhelníka tvoří úplný čtyřstran, mající tytéž úhlopříčny jako čtyřúhelník; každý vrchol čtyřstranu, který leží na jedné z úhlopříčen z bodu $D$ vycházejících, jest středem kružnice, která se dotýká průvodičů bodů dotyčných pro ony strany čtyřstranu, které zmíněným vrcholem procházejí. Spojnice libovolného bodu $D$ v rovině kuželosečky ležícího s body, v nichž jeho polára vzhledem ke kuželosečce její přímky řídící protíná, tvoří úhly, jejichž symmetrály půlí též úhly, které tvoří spojnice bodu $D$ s ohnisky kuželosečky a tedy také úhly, které tvoří tečny z bodu $D$ ke kuželosečce vedené.“

6. Z úvah právě provedených plyne následující konstrukce ploch kulových danému čtyřúhelníku $ABCD$ vepsaných.

Sklopme rovinu $ABC$ do roviny $ACD$, při čemž přijde bod $B$ do polohy $(B)$, sestrojme osy souměrnosti $r$, $s$ přímek $AD$, $CD$, jakož i osy souměrnosti $u$, $v$ přímek $A(B)$, $C(B)$ a obraťme pak zřetel ku každé z kuželoseček $h$, $e$ zvlášť, které bodem $(B)$ procházejí a body $A$, $C$ mají za ohniska. Z kuželoseček těch jest jedna $h$ hyperbolou, druhá $e$ ellipsou.

Budiž pro $h$ přímka $u$ tečnou v bodě $(B)$. Pol $E$ paprsku fokálního $A(B)$ vzhledem ku $h$ jest průsečíkem přímky $u$ s kolmicí v $A$ ku $A(B)$ vztyčenou. Tento pól leží na přímce řídící $a$ kuželosečky $h$ pro ohnisko $A$, čímž přímka $a$ jest již stanovena. Poněvadž pól $G$ přímky $AD$ leží na $a$, obdržíme jej v průseku přímky $a$ s kolmicí v $A$ ku $AD$ vztyčenou. Tečny z $G$ ku $h$ protínají přímky $r$, $s$ již v bodech, jež jsme prve označili $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$.

Tím jsou kružnice $m$, $m_1$, $m_2$, $m_3$, v nichž rovina $ABD$ čtyři z hledaných ploch kulových protíná, stanoveny; neboť mají uvedené body za středy a dotýkají se přímek $AD$, $CD$. Kružnice obdobné a jejich středy $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ pro další čtyři koule úloze vyhovující, obdržíme týmž postupem na základě ellipsy $e$, čímž dospějeme k bodu $G_*$ obdobnému bodu $G$.

Tečny z $G$ ku $h$, resp. z $G_*$ ku $e$ obdržíme, když kružnici řídící kolem $C$ opsanou, jejíž poloměr pro $h$ se rovná $|CB - AB|$, pro $e$ ale $|CB + AB|$ protneme kružnicí k ní orthogonálnou, mající střed v $G$ resp. $G_*$ a bodem $A$ jdoucí v bodech 1, 2. Hledané tečny jsou kolmice z $G$, resp. $G_*$ ku $A1$, $A2$ spuštěné.

Protíná-li jedna z hledaných koulí K, jejíž střed značíme $K$, rovinu $ACD$ v kružnici $m$ středu $M$, rovinu $ABC$ v kružnici $n$ středu $N$, jest rovina $MKN$ kolma ku $AC$; po sklopení roviny $ABC$ přijde bod $N$ do polohy $(N)$ a jest i potom $M(N) \perp AC$.

Protínají-li tudíž kolmice ku $AC$ z bodů $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ vedené přímku $u$ v bodech $(N)$, $(N_1)$, $(N_2)$, $(N_3)$ a z bodů $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ přímku $v$ v bodech $(\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, $(\mathfrak{N}_3)$, tu obdržíme kružnice $(n)$, $(n_1)$, $(n_2)$, $(n_3)$ a kružnice $(\mathfrak{n})$, $(\mathfrak{n}_1)$, $(\mathfrak{n}_2)$, $(\mathfrak{n}_3)$, které příslušně v bodech těch mají své středy a dotýkají se přímek $A(B)$, $C(B)$. Kružnice tyto protínají se s příslušnými kružnicemi v rovině $ACD$ na hledaných koulích ležícími na přímce $AC$ reálně nebo združeně imaginárně.

Otočíme-li nyní rovinu $ABC$ z polohy $A(B)C$ do polohy původní, pak stanoví dvojiny kružnic $mn$, $m_1n_1$, $m_2n_2$, $m_3n_3$, $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{m}_3\mathfrak{n}_3$ všech osm ploch kulových úloze odpovídajících.

---

# O determinantu z Bernoulliských funkcí.

Napsal

Dr. **Karel Petr,**
m. professor české university v Praze.

Chtěje odvoditi některé vzorce Čebyševovy o interpolaci pomocí methody nejmenších čtverců,*) přišel jsem k determinantu

$$F(x) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_{m-1}(x) \\ \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m-1}(x) & \varphi_m(x), & \ldots, & \varphi_{2m-1}(x) \end{vmatrix},$$

*) Viz článek v programmu druhého českého gymn. v Brně z roku 1902/3.