Václav Hübner
Plášť rotačního kužele seříznutého v parabole

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 1, 93--101

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123656`

Stejně tomu u číslice za 5, kde výminku tvoří číslice bráhmanské, nobatejské a čínské, zejména tato poslední. Čínská značka pro 6 ukazuje se také jen křížením dvou čárek. Znaky za 10, čínský, egyptský, římský a etruský mohou vesměs pokládány býti za tvary geometrické, křížení, po případě zaokrouhlení čárek, jež může býti náhodné, písaři spůsobené. Ve značce však pro 100 jen u římského ⚹ lze připustiti vznik geometrický.

Uvedeme-li si nyní na paměť, co dříve již řečeno bylo o vývoji čísel, a číslovek a přirovnáme k tomu číslice antických národů kulturních, můžeme o vzniku nejstarších číslic pronésti tento úsudek.

Nejstarší číslice do 10 jsou většinou původu staršího než abeceda, znaky samostatné, neodvislé od abecedy. Člověk v nejstarších dobách označoval si počet jednotek stejným počtem čárek, vrypy do kamene, vruby do dřeva,[41]) jak činí podnes lidé neznalí písma na psací desky. Pokud užíval čísel malých do desíti, patnácti, znázorňoval čísla stejným počtem čárek, v aramejštině až i číslo 15.[42])

(Pokračování.)

Plášť rotačního kužele seříznutého v parabole.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

V ročníku XXXII. Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky podal jsem stanovení pláště rotačního kužele seříznutého v ellipse. Aby plocha rotačního kužele seříznuta byla v parabole, musí odchylka ω roviny ϱ od základny kužele rovnati se odchylce α stran kužele od jeho kruhové základny.

Je-li dáno r (poloměr kruhové základny), úsek roviny ϱ

---

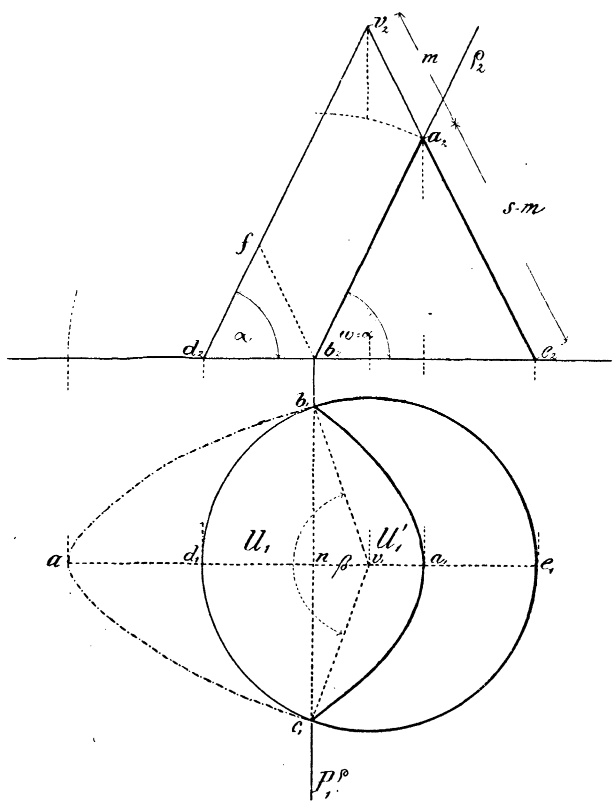
[41]) Vrubů místo číslic užívali též Slované: „I cožkoli pili sedláci co vlk na řád nosil, to vše na *vruby* a na roky dával a věřil.“ (Z „Hádání, pravdy a lži“ z r. 1467).

[42]) Viz Gundermann: „Die Zahlzeichen,“ str. 19.

na straně $s = \overline{v_2 e_2}$ s měřený od vrcholu $\overline{v_2 a_2} = m$ a odchylka stran kužele od jeho základny α (viz obr.) pak jest

$$p_1 = p \cos \alpha,$$

značí-li p plášť a p_1 jeho průmět na základnu.



Průmět

(1) $$p_1 = \pi r^2 - (U_1 + U_1'),$$

kdež značí U_1 úseč kruhovou na základně a U_1' úseč řezu parabolického, obě vzniklé stopou P^ρ roviny ρ.

Z obrazce jest zjevno, že

$$U_1 = \frac{\pi r^2}{360^0}\beta - \overline{b_1 n} \cdot \overline{v_1 n}$$

a

$$U'_1 = \frac{4}{3}\,\overline{a_1 n} \cdot \overline{b_1 n}.\ ^{*)}$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (1), obdržíme

$$p_1 = \pi r^2 \left(1 - \frac{\beta}{360^0}\right) + \frac{1}{3}\,\overline{b_1 n}\,(3\,\overline{v_1 n} - 4\,\overline{a_1 n}).$$

Úsečky $\overline{b_1 n}$, $\overline{v_1 n}$ a $\overline{a_1 n}$ určíme takto:
Z rovnoramenného $\triangle\, a_2 b_2 e_2$ jest

$$\frac{b_2 e_2}{2} = (s - m) \cos \alpha,$$

mimo to pak

$$s = \frac{r}{\cos \alpha},$$

pročež

(2) $$\overline{a_1 n} = r - m \cos \alpha.$$

Úsečka

$$\overline{v_1 n} = r - \overline{n d_1}\,,\quad \overline{n d_1} = \overline{b_2 d_2}\,.$$

Z rovnoramenného $\triangle\, b_2 d_2 f$ $(b_2 f \parallel e_2 v_2)$ jest

$$\frac{\overline{b_2 d_2}}{2} = m \cos \alpha,$$

tudíž

(3) $$\overline{v_1 n} = r - 2m \cos \alpha.$$

Pro úsečku $\overline{b_1 n}$ platí úměra

$$\overline{n d_1} : \overline{b_1 n} = \overline{b_1 n} : \overline{n e_1}\,,$$

mimo to pak

$$\overline{n d_1} = \overline{b_2 d_2}\,,\quad \overline{n e_1} = \overline{b_2 e_2}\,,$$

pročež

$$\overline{b_1 n}^2 = \overline{b_2 d_2}\,.\,\overline{b_2 e_2}\,.$$

---

*) Skutečná velikost úseku *an* jakož i úseku parabolického vyznačena jest v obrazci.

Dosadíme-li za $\overline{b_2 d_2}$, $\overline{b_2 e_2}$ a s známé již hodnoty, obdržíme

$$\overline{b_1 n}^2 = 4\, m\,(s - m) \cos^2 \alpha$$

čili

$$(4) \qquad \overline{b_1 n} = 2 \sqrt{m\,(r - m \cos \alpha) \cos \alpha}\,.$$

Úhel středový β určí se z rovnoramenného $\triangle\, v_1 b_1 c_1$, z něhož jde

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\overline{n b_1}}{\overline{v_1 n}},$$

nebo též

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{\overline{v_1 n}}{\overline{v_1 b_1}},$$

t. j.

$$(5) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \frac{2\sqrt{m\,(r - m \cos \alpha) \cos \alpha}}{r - 2m \cos \alpha} \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \frac{r - 2m \cos \alpha}{r}. \end{aligned}$$

Jest tedy

$$\begin{aligned} p_1 = {} & \pi r^2 \left(1 - \frac{\beta}{360^0}\right) \\ & + \frac{2}{3}\,(3r - 6m \cos \alpha - 4r + 4m \cos \alpha) \sqrt{m\,(r - m \cos \alpha) \cos \alpha} \end{aligned}$$

čili

$$(6) \qquad \begin{aligned} p_1 = {} & \frac{1}{3}\left[3\pi r^2 \left(1 - \frac{\beta}{360^0}\right)\right. \\ & \left. - 2\,(r + 2m \cos \alpha) \sqrt{m\,(r - m \cos \alpha) \cos \alpha}\right] \end{aligned}$$

a plášť

$$p = \frac{p_1}{\cos \alpha}.$$

Béřeme-li za známé veličiny s, m, α, nabudeme

$$(7) \qquad p = \frac{\cos \alpha}{3}\left[3\pi s^2 \left(1 - \frac{\beta}{360^0}\right) - 2\,(s + 2m) \sqrt{m\,(s - m)}\right].$$

Důsledky.

1. Je-li $m = 0$, jest též z rovnice (5) $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 0$, $\sphericalangle \beta = 0$ a z rovnice (6)

$$p_1 = \pi r^2,$$

tudíž

$$p = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha} = \pi r s$$

(plášť kužele plného).

2. Je-li $m = s = \frac{r}{\cos\alpha}$, jest z rovnice (5)

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{r - 2r}{r} = -1$$

čili

$$\frac{\beta}{2} = 180^0, \quad \beta = 360^0$$

a z rovnic (7)

$$p = 0,$$

t. j. rovina ϱ v tomto případě dotýká se jen základny kužele v bodě e.

3. Je-li

$$m = \frac{s}{2} = \frac{r}{2\cos\alpha},$$

t. j. rovina ϱ prochází středem základny, pak jest

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \infty, \quad \sphericalangle \beta = 180^0$$

a

$$p = \frac{2m^2\cos\alpha}{3}(3\pi - 4),$$

nebo, zavedeme-li místo $m = \frac{r}{2\cos\alpha}$,

$$p = \frac{r^2(3\pi - 4)}{6\cos\alpha}.$$

Pro kužel rovnostranný jest $\alpha = 60^0$ a p v tomto případě jest

$$p = \frac{m^2}{3}(3\pi - 4),$$

anebo

$$p = \frac{r^2}{3}(3\pi - 4),$$

ježto $$m = r.$$

4. Je-li $tg \frac{\beta}{2} = 1$ plyne z rovnice (5)

$$2\sqrt{m(r - m \cos \alpha) \cos \alpha} = r - 2m \cos \alpha,$$

t. j.

$$8m^2 \cos^2 \alpha - 8mr \cos \alpha + r^2 = 0$$

a

$$m = \frac{8r \cos \alpha \pm \sqrt{64r^2 \cos^2 \alpha - 32r^2 \cos^2 \alpha}}{16 \cos^2 \alpha}$$

čili

$$m = \frac{r(2 \pm \sqrt{2})}{4 \cos \alpha},$$

a ježto $r = s \cos \alpha$, jest úsek

$$m = \frac{s(2 \pm \sqrt{2})}{4},$$

kterýžto výraz lze snadno sestrojiti.

Pro dolejší znaménko jest

$$\frac{\beta}{2} = 45^0$$

a pro hořejší znaménko

$$\frac{\beta}{2} = 180^0 + 45^0 = 225^0$$

čili $$\beta = 450^0 = 360^0 + 90^0,$$

jak ze vzorce pro $\cos \frac{\beta}{2}$ poznáváme.

Jest totiž

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r - 2m \cos \alpha}{r}$$

a

$$m = \frac{r(2 \mp \sqrt{2})}{4 \cos \alpha}.$$

V tomto případě jest dle rovnice (7) plášť kužele seříznutého v parabole ve vzdálenosti $m = \frac{s(2 - \sqrt{2})}{4}$ od vrcholu

$$p = \frac{\cos\alpha}{3}\left[3\pi s^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left. - 2\left(s + \frac{s(2-\sqrt{2})}{2}\right)\sqrt{\frac{s(2-\sqrt{2})}{4}\left(s - \frac{s(2-\sqrt{2})}{4}\right)}\right]$$

a po náležité úpravě

$$p = \frac{s^2\cos\alpha}{12}(9\pi - 4\sqrt{2} + 2)$$

čili

$$p = \frac{r^2}{12\cos\alpha}(9\pi - 4\sqrt{2} + 2)$$

a pro kužel rovnostranný

$$p = \frac{r^2}{6}(9\pi - 4\sqrt{2} + 2).$$

Je-li

$$m = \frac{s(2+\sqrt{2})}{4},$$

jest

$$p = \frac{s^2}{12}\cos\alpha\,(9\pi - 4\sqrt{2} - 2)$$

a rozdíl obou plášťů

$$\frac{s^2\cos\alpha}{3} = \frac{rs}{3}.$$

Podobně možno upraviti rovnici (6) a (7) při

$$\frac{\beta}{2} = 30^0, \quad \frac{\beta}{2} = 60^0.$$

V prvním případě jest z rovnice (5)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r - 2m\cos\alpha}{r}$$

a

$$m = \frac{r(2-\sqrt{3})}{4\cos\alpha},$$

nebo též

$$m = \frac{s(2-\sqrt{3})}{4}$$

a v druhém případě jest

$$\frac{1}{2} = \frac{r - 2m\cos\alpha}{r}$$

a

$$m = \frac{r}{4\cos\alpha}$$

čili

$$m = \frac{s}{4}.$$

Pro plášť kužele obsaženého mezi vrcholem a rovinou sečnou obdržíme rovnici

$$p = \frac{U_1 + U'_1}{\cos\alpha},$$

t. j.

$$p = \left[\frac{\pi r^2}{360^0}\beta - \frac{\overline{b_1 n}}{3}(3 \, . \, \overline{v_1 n} - 4\overline{a_1 n})\right] : \cos\alpha$$

čili

$$(8) \quad p = \frac{1}{3\cos\alpha}\left[\frac{\pi r^2}{120^0}\beta + 2(r + 2m\cos\alpha)\sqrt{m(r - m\cos\alpha)\cos\alpha}\right].$$

Pro rovnostranný kužel, je-li rovina ϱ vedena středem základny ($m = r$) nabudeme vzorce

$$p = \frac{r^2}{3}(3\pi + 4).$$

Srovnáme-li tento vzorec se vzorcem v důsledku 3., shledáme, že součet obou dá $2\pi r^2$ (plášť plného kužele rovnostranného) a rozdíl obou plášťů $\frac{8}{3}r^2$.

Podobně se přesvědčíme, sečtouce rovnici

$$p = \frac{p_1}{\cos\alpha}$$

plynoucí ze vzorce (6) s rovnicí (8), že součet jich dá

$$\frac{\pi r^2}{\cos\alpha} = \pi r s$$

(plášť plného kužele).

Dodatek.

Parametr řezu parabolického určíme z rovnice

$$2p = \frac{\overline{b_1 n}^2}{\overline{an}}$$

a ježto

$$\overline{an} = \frac{\overline{a_1 n}}{\cos\alpha},$$

jest

$$2p = \frac{4\,m\,(r - m\cos\alpha)\cos^2\alpha}{r - m\cos\alpha} = 4m\cos^2\alpha,$$

čili

$$p = 2m\cos^2\alpha$$

a pro kužel rovnostranný

$$p = \frac{m}{2}.$$

Prochází-li rovina středem základny, jest při kuželi rovnostranném

$$p = \frac{r}{2}.$$

Je-li

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 45^0 \\ 30^0 \end{Bmatrix},$$

jest

$$p = \begin{Bmatrix} m \\ \frac{3m}{2} \end{Bmatrix}.$$

Příspěvek ku rotačním plochám 2ho stupně.

Napsal

Václav Havlíček,
professor české státní průmyslové školy v Plzni.

I. Otáčí-li se kuželosečka k o ohniskách F a F_1 kol své hlavní osy, vytvoří rotační plochu stupně druhého. Libovolná