Jiří Klapka

Sur les surfaces réglées dont les courbes flecnodales sont distinctes et non planes

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 273--288

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123653

Sur les surfaces réglées dont les courbes flecnodales sont distinctes et non planes.

Jiří Klapka, Brno.

L'objet principal de l'article suivant est la surface $\bar{R}$ définie par la surface réglée gauche R donnée comme lieu de droites d'intersection $\bar{p}$ des plans osculateurs aux courbes flecnodales de R. La droite $\bar{p}$ qui engendre la surface $\bar{R}$ intervient dans plusieurs considérations géométriques surtout de MM. Wilczynski et Mayer (l'axe); dans l'article suivant, en considérant toute la surface $\bar{R}$, il est possible de démontrer l'identité de quelques résultats de MM. Wilczynski et Mayer et de trouver quelques relations nouvelles.

Chaque particularisation d'une des surfaces considérées R et $\bar{R}$ entraîne une certaine particularisation de l'autre. Quelquesuns de ces cas particuliers se trouvent résolus dans cet article; par exemple, le cas de la surface $\bar{R}$ développable, ou celui où $\bar{R}$ est une demiquadrique, enfin le cas où R appartient à une classe spéciale G ou K.

I. Soit $R(y, z)$ une surface réglée gauche dans l'espace projectif à trois dimensions dont les courbes flecnodales C_y et C_z sont distinctes et non rectilignes.

Aux génératrices de R faisons correspondre les génératrices d'une autre surface $\bar{R}$ définie de la manière suivante:

Si $p=(y, z)$ est une génératrice de R et y, z sont les points flecnodaux de p, les deux plans osculateurs $\bar{\eta} = (y, y', y'')$ et $\bar{\zeta}=(z, z', z'')$ des courbes flecnodales en y et z se coupent dans une droite $\bar{p}$ qui est la génératrice correspondante de $\bar{R}$ $(\bar{\eta}, \bar{\zeta})$.

On peut énoncer le théorème suivant:

Pour que $\bar{R}$ soit développable il faut (et il suffit évidemment) qu' une courbe flecnodale de R au moins soit plane.

On démontrera aisément ce théorème en employant les formules de la théorie des surfaces réglées gauches de M. E. Čech. Pour cela écrivons le système canonique différentiel flecnodal (Čech [1], p. 229). Ses coefficients sont composés d'invariants de la surface $m(v)$, $n(v)$, $j(v)$, $\delta = \pm 1$; la variable indépendante v étant l'arc projectif, le système en question prend la forme suivante:

$$y'' = 2my' + 2\delta nz' + (m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j) + \delta n'z, \quad \text{(1a)}$$
$$z'' = -2ny' - 2mz' - n'y + (-m' + \delta n^2 - m^2 + 1 - j)\,z. \quad \text{(1b)}$$

Si v varie, les points $y(v)$, $z(v)$ décrivent les courbes flecnodales C_y, C_z. A chaque valeur de v correspondent les points flecnodaux y, z d'une génératrice $p(v) = (y, z)$ de la surface.

Imaginons une surface R déterminée par le système (1a), (1b). Pour commencer la démonstration remarquons que, pour que la courbe flecnodale C_y soit plane il faut et il suffit que (Klapka [2], 13)

$$a_0 = 0,$$

où

$$a_0 = 2nn'' - 3n'^2 + 4n\,(2n - 2m'n + mn') + 4n^2\,(m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j).$$

On a de même la condition nécessaire et suffisante pour que C_z soit plane

$$a_4 = 0,$$

où

$$a_4 = 2nn'' - 3n'^2 - 4mnn' + 4n^2\,(m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j).$$

Pour abréger les calculs observons que la génératrice $\bar{p}$ de $\bar{R}$ joigne les points

$$\bar{y} = n'y + 2ny' \quad \text{(2a)}$$

et

$$\bar{z} = n'z + 2nz', \quad \text{(2b)}$$

où d'après (1ab) $\bar{y}$ signifie le point d'intersection de la tangente (y, y') à la courbe flecnodale C_y en y avec $\bar{\zeta}$. Pareillement $\bar{z}$ signifie le point d'intersection de la tangente (z, z') à C_z en z avec $\bar{\eta}$.

Donc, la condition suffisante et nécessaire pour que $\bar{R}$ soit développable est

$$\bar{\omega} = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}') = 0,$$

où

$$\bar{\omega} = (n'y + 2ny',\ n'z + 2nz',\ n''y + 3n'y' + 2ny'',\ n'' + 3n'z' + 2nz'') = 0.$$

En vertu de (1ab) il en résulte facilement

$$\bar{\omega} = a_0 a_4\,(y, z, y', z') = 0. \quad \text{(3)}$$

Or, R étant gauche on a

$$(y, z, y', z') \neq 0,$$

de sorte que l'équation (3) ne peut être satisfaite que si $a_0 a_4 = 0$.

Donc le théorème énoncé est démontré.

II. En conséquence du théorème du numéro précédent nous supposerons dans toutes les considérations ultérieures que $a_0 \neq 0$, $a_4 \neq 0$.

Pour déduire les équations fondamentales pour $\bar{R}$ dérivons (2a) et éliminons y'' au moyen de (1a). Nous avons

$$\bar{y}' - 2\delta n\bar{z} = [n'' + 2n(m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j)]\, y + (3n' + 4nm)\, y'.$$

En résolvant par rapport à y et y' le système formé par l'équation qui vient d'être écrite et par (2a) on trouve

$$y = -\frac{(3n' + 4mn)\,\bar{y} + 4\delta n^2\bar{z} - 2n\bar{y}'}{a_4}, \tag{4a}$$

$$y' = \frac{[n'' + 2n(m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j)]\,\bar{y} + 2\delta nn'\bar{z} - n'\bar{y}'}{a_4}. \tag{4b}$$

Par un procédé analogue on obtient les points z et z' exprimés à l'aide de $\bar{y}$, $\bar{z}$ et de leurs dérivées sous la forme

$$z = \frac{4n^2\bar{y} + (4mn - 3n')\,\bar{z} + 2n\bar{z}'}{a_0}, \tag{5a}$$

$$z' = \frac{-2nn'\bar{y} + [n'' + 2n(-m' + \delta n^2 - m^2 + 1 - j)]\,\bar{z} - n'\bar{z}'}{a_0}. \tag{5b}$$

En éliminant y' de l'équation (4b) et de celle qui résulte de (4a) par dérivation et en faisant un calcul analogue pour (5b) et (5a) on obtient

$$\bar{y}'' = \left(\frac{a'_4}{a_4} + 2m\right)\bar{y}' + 2\delta n\bar{z}' + \frac{1}{4n^2}\left(a_4 + 3n'^2 + 12mnn' + 8n^2m' + 6nn'' - 8n^2m\frac{a'_4}{a_4} - 6nn'\frac{a'_4}{a_4}\right)\bar{y} + \delta\left(5n' - 2n\frac{a'_4}{a_4}\right)\bar{z}, \tag{6a}$$

$$\bar{z}'' = -2n\bar{y}' + \left(\frac{a'_0}{a_0} - 2m\right)\bar{z}' + \left(2n\frac{a'_0}{a_0} - 5n'\right)\bar{y} + \frac{1}{4n^2}\left(a_0 + 3n'^2 - 12mnn' - 8m'n^2 + 6nn'' + 8mn^2\frac{a'_0}{a_0} - 6nn'\frac{a'_0}{a_0}\right)\bar{z}. \tag{6b}$$

Le système (6ab) peut être utilisé, sans doute, pour l'étude de la surface $\bar{R}$. Mais, pour avoir plus de simplicité dans les calculs, nous allons le mettre sous une forme équivalente, en posant

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y}}{\sqrt[4]{|a_0a_4|}}, \quad z_1 = \frac{\bar{z}}{\sqrt[4]{|a_0a_4|}}, \tag{7}$$

le dénominateur étant réel et positif.

En se servant de (3) on voit sans peine que l'on a

$$(\bar{y}_1, \bar{z}_1, \bar{y}'_1, \bar{z}'_1) = \pm (y, z, y', z') = \pm 1.$$

La forme équivalente cherchée du système d'équations fondamentales de $\bar{R}$ est la suivante

$$\bar{y}''_1 = \left[2m + \frac{1}{2}\left(\frac{a'_4}{a_4} - \frac{a'_0}{a_0}\right)\right]\bar{y}'_1 + 2\delta n\bar{z}'_1 + \left[\frac{1}{4n^2}\left(a_4 + 3n'^2 + \right.\right.$$
$$+ 12mnn' + 8n^2m' + 6nn'' - 8n^2m\frac{a'_4}{a_4} - 6nn'\frac{a'_4}{a_4}\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{4}\frac{(a_0a_4)'}{a_0a_4}\left(\frac{a'_4}{a_4} + 2m\right) + \frac{3}{16}\frac{(a_0a_4)'^2}{a_0^2a_4^2} - \frac{1}{4}\frac{(a_0a_4)''}{a_0a_4}\right]\bar{y}_1 +$$
$$+ \delta\left[5n' - 2n\frac{a'_4}{a_4} + \frac{1}{2}n\frac{(a_0a_4)'}{a_0a_4}\right]\bar{z}_1, \tag{8a}$$

$$\bar{z}''_1 = -2n\bar{y}'_1 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a'_4}{a_4}\right) - 2m\right]\bar{z}'_1 + \left[-5n' + \right.$$
$$\left. + 2n\frac{a'_0}{a_0} - \frac{1}{2}n\frac{(a_0a_4)'}{a_0a_4}\right]\bar{y}_1 + \left[\frac{1}{4n^2}\left(a_0 + 3n'^2 - 12mnn' - 8m'n^2 + \right.\right.$$
$$+ 6nn'' + 8mn^2\frac{a'_0}{a_0} - 6nn'\frac{a'_0}{a_0}\right) + \frac{1}{4}\frac{(a_0a_4)'}{a_0a_4}\left(\frac{a'_0}{a_0} - 2m\right) +$$
$$\left. + \frac{3}{16}\frac{(a_0a_4)'^2}{a_0^2a_4^2} - \frac{1}{4}\frac{(a_0a_4)''}{a_0a_4}\right]\bar{z}_1. \tag{8b}$$

En comparant les équations de ce système aux équations fondamentales de la théorie des surfaces réglées gauches (Čech [1], p. 186, (11), $\Theta' = 0$), on trouve pour $\bar{R}$:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a} &= \delta n,\\
\bar{b} &= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m,\\
\bar{c} &= n,\\
\delta\bar{A} &= 4n' + n\left(\frac{1}{2}\frac{a'_0}{a_0} - \frac{3}{2}\frac{a'_4}{a_4}\right),\\
\bar{B} &= 1 - 2m' - 2m\frac{n'}{n} - \frac{3}{2}m\left(\frac{a'_0}{a_0} + \frac{a'_4}{a_4}\right) -\\
&\quad - \frac{3}{2}\frac{n'}{n}\left(\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a'_4}{a_4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{a'^2_0}{a_0^2} - \frac{a'^2_4}{a_4^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a'_4}{a_4}\right)',\\
\bar{C} &= 4n' + n\left(\frac{1}{2}\frac{a'_4}{a_4} - \frac{3}{2}\frac{a'_0}{a_0}\right),\\
\bar{j} &= j + \frac{3}{4}\frac{n'}{n}\left(\frac{a'_0}{a_0} + \frac{a'_4}{a_4}\right) - \frac{5}{16}\left(\frac{a'_0}{a_0} + \frac{a'_4}{a_4}\right)^2 +\\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{(a_0a_4)''}{a_0a_4} - \frac{1}{16}\left(\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a'_4}{a_4}\right)^2 - \tfrac{1}{2}m\left(\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a'_4}{a_4}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{9a, b, c, d, e, f, g}$$

Évidemment les arcs projectifs des surfaces $\bar{R}$ et R ne se conservent pas dans la correspondance considérée des droites $\bar{p}, p$; c'est à dire, en général, $\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C}$ dépend de v et n'est pas une constante.

III. On appelle famille $\mathfrak{R}$ un système de courbes d'une surface réglée gauche lorsque les courbes du système sont décrites par les points $t_1 y + t_2 z$ où le rapport $t_1 : t_2$ satisfait à une équation de Riccati (Mayer [3])

$$t'_1 t_2 - t'_2 t_1 = \alpha t_1^2 + 2\beta t_1 t_2 + \gamma t_2^2 \equiv \varphi(t). \tag{10}$$

Géométriquement une famille $\mathfrak{R}$ est caractérisée par la propriété qu'il y a une correspondance projective entre les deux séries de points découpées, sur deux génératrices quelconques, par les courbes de la famille. Par exemple les asymptotiques (non rectilignes) forment une famille $\mathfrak{R}$. On obtient l'équation d'asymptotiques en posant dans (10) $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$; on obtient donc (Čech [1], p. 198)

$$t'_1 t_2 - t'_2 t_1 = a t_1^2 + 2b t_1 t_2 + c t_2^2 \equiv \mathrm{f}(t). \tag{11}$$

Parmi toutes les familles $\mathfrak{R}$ d'une surface réglée gauche il y en a qui sont liées à la surface d'une manière invariante. A côté de la famille d'asymptotiques une famille mérite une considération particulière. C'est, en terminologie de M. O. Mayer, la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ, définie par ses trois couples de courbes remarquables: les deux ,,complex curves" de Wilczynski, les deux courbes flecnodales et les deux courbes harmoniques (Mayer [3]).

Remarquons que R étant donnée par le système flecnodale (1ab), les courbes C_y et C_z sont flecnodales tandis que les courbes $C_{t_1 y + t_2 z}$ décrites par les points $t_1 y + t_2 z$ où $t_1 : t_2 =$ const., engendrent la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ. Parmi les courbes de cette famille les courbes C_{y+z} et C_{y-z} sont harmoniques si $\delta = +1$ et elles sont complex curves si $\delta = -1$. Dans l'équation (11) des asymptotiques on doit poser (Čech [1], p. 228)

$$a = \delta n, \; b = -m, \; c = n, \tag{11a}$$

de sorte qu'elle devient

$$t'_1 t_2 - t'_2 t_1 = \delta n t_1^2 - 2m t_1 t_2 + n t_2^2. \tag{11b}$$

On sait que les tangentes des courbes d'une famille $\mathfrak{R}$ aux points d'une génératrice p engendrent une quadrique (ou plus précisement une demiquadrique) non dégénérée $Q(p)$ qui touche la surface le long de p. En deux points de p la tangente à la courbe de $\mathfrak{R}$ est en même temps asymptotique. On appelle, d'après M. O. Mayer, les points de ce couple les points fondamentaux et les courbes décrites par ces points les courbes fondamentales de la famille.

Si le point $t_1 y + t_2 z$ est fondamental et si (10) est l'équation de la famille $\mathfrak{R}$ considérée, le rapport $t_1 : t_2$ satisfait à l'équation

$$f(t) - \varphi(t) = (a - \alpha)\, t_1^2 + 2\,(b - \beta)\, t_1 t_2 + (c - \gamma)\, t_2^2 = 0.$$

Supposons que la famille considérée soit la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ. L'équation précédente devient d'après (11a)

$$\delta n t_1^2 - 2 m t_1 t_2 + n t_2^2 = 0,$$

ou bien

$$n\,(\delta t_1^2 + t_2^2) - 2 m t_1 t_2 = 0.$$

Cette formule montre que le couple de points fondamentaux de Σ divise harmoniquement le couple de points harmoniques.

En dehors de la quadrique $Q(p)$ considérons la quadrique consécutive $Q(p')$ qui coupe $Q(p)$ dans une courbe du quatrième degré évidemment décomposée en p et en une cubique gauche C^3. Cette dernière rencontre p aux points fondamentaux et elle peut d'ailleurs être réductible ou indéterminée. C'est M. O. Mayer ([3]) qui a donné une classification détaillée des familles $\mathfrak{R}$ au point de vue de la réductibilité de C^3. Nous nous bornerons à une remarque sur les familles $\mathfrak{R}$ axiales. On appelle ainsi une telle famille $\mathfrak{R}$ que la cubique caractéristique C^3 se décompose en trois droites. Évidemment un couple de ces droites est formé par les tangentes asymptotiques aux points fondamentaux et appartient à la demi-quadrique $Q(p)$ tandis que la troisième droite q appartient à la demiquadrique complémentaire.

Si la famille $\mathfrak{R}$ de courbes de R est axiale, les tangentes aux courbes de la famille engendrent une congruence W. Les surfaces focales sont R et $\overline{R}$ où $\overline{R}$ est l'autre surface réglée gauche décrite par q.

Si les courbes d'une surface réglée gauche R d'une famille $\mathfrak{R}$ sont les courbes $C_{t_1 y + t_2 z}$ où le rapport $t_1 : t_2$ est une constante (on dit dans ce cas que R est rapportée au $\mathfrak{R}$), les conditions pour que $\mathfrak{R}$ soit axiale prennent une forme particulièrement simple (Mayer [3])

$$\frac{a' + A}{a} = \frac{b' + B}{b} = \frac{c' + C}{c}. \tag{12}$$

Remarquons encore que la famille $\mathfrak{R}$ à laquelle se trouve rapportée la surface R donnée par le système flecnodal (1ab) est la famille principale Σ.

Pour interpréter les relations trouvées entre les quantités fondamentales de R et de $\overline{R}$ il est utile d'éclaircir la liaison géométrique entre les points $t_1 y + t_2 z$ de p et $t_1 \overline{y} + t_2 \overline{z}$ de $\overline{p}$.

On vérifie sans peine que le plan tangent à R au point $t_1 y + t_2 z$ coupe $\overline{p}$ en $t_1 \overline{y} + t_2 \overline{z}$.

En effet, le plan tangent considéré est le plan

$$(y, z, (t_1 y + t_2 z)') = (y, z, t_1 y' + t_2 z').$$

Donc il suffit de démontrer que

$$(y, z, t_1 y' + t_2 z', \; t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z}) = 0,$$

c'est à dire d'après (2a, b) que

$$(y, z, t_1 y' + t_2 z', \; n' (t_1 y + t_2 z) + 2n (t_1 y' + t_2 z')) = 0;$$

mais cette relation est évidente.

Cherchons encore le point d'intersection du plan tangent à $\bar{R}$ en $t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z}$ avec p. $\tau_1 y + \tau_2 z$ étant le point cherché on trouve que le rapport $\tau_1 : \tau_2$ satisfait à l'équation

$$(\tau_1 y + \tau_2 z, \; \bar{y}, \bar{z}, t'_1 \bar{y} + t'_2 \bar{z} + t_1 \bar{y}' + t_2 \bar{z}') = 0,$$

et par suite, d'après (4a) et (5a), à l'équation

$$a_0 \tau_1 t_2 - a_4 \tau_2 t_1 = 0,$$

qui à son tour peut être remplacée par les deux équations plus commodes

$$\tau_1 = a_4 t_1, \quad \tau_2 = a_0 t_2. \tag{13}$$

En résumant on a donc:

Les équations (13) *expriment une homologie ponctuelle sur la droite p de manière qu'au point $t_1 y + t_2 z$ correspond le point $\tau_1 y + \tau_2 z = a_4 t_1 y + a_0 t_2 z$ qui peut être construit comme il suit*: *Le plan tangent à R en $t_1 y + t_2 z$ coupe $\bar{p}$ en $t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z}$, le plan tangent à $\bar{R}$ en $t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z}$ coupe p en $\tau_1 y + \tau_2 z$. L'homologie en question est évidemment non dégénérée, les cas $a_0 = 0$ et $a_4 = 0$ étant exclus. Elle possède deux points unis qui coïncident avec les points flecnodaux. a_0/a_4 est le birapport de cette homologie.*

Cela étant on peut se poser avec M. E. J. Wilczyński ([4], p. 214) la question suivante:

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{p}$ touche la quadrique $H(p)$ osculatrice de R le long de p (c'est à dire la quadrique engendrée par les tangentes asymptotiques de R aux points de p)?

La droite

$$r = (t_1 y + t_2 z, \; t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z})$$

touche évidemment R en $t_1 y + t_2 z$ et coupe $\bar{p}$ au point $t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z}$. La tangente asymptotique de R au point $t_1 y + t_2 z$ passe aussi par le point $(t_1 y + t_2 z)'$, où l'on doit poser pour t'_1 et t'_2 (Čech [1], p. 199 (2) et p. 228)

$$t'_1 = b t_1 + c t_2, \quad t'_2 = - a t_1 - b t_2,$$

les quantités a, b, c étant données par (11a).

Donc, le point considéré est

$$(t_1 y + t_2 z)' = (-mt_1 + nt_2)\, y + (-\delta nt_1 + mt_2)\, y + t_1 y' + t_2 z'. \tag{14}$$

Pour que r soit une tangente asymptotique de R il faut alors et il suffit que la matrice

$$\left\| \begin{matrix} t_1, & t_1, & 0, & 0 \\ n't_1, & n't_2, & 2nt_1, & 2nt_2 \\ -mt_1 + nt_2, & -\delta nt_1 + mt_2, & t_1, & t_2 \end{matrix} \right\| \tag{M}$$

soit du rang 2.

Le cas $n = 0$ étant exclu, les conditions cherchées se réduisent à une seule

$$\delta nt_1^2 - 2mt_1t_2 + nt_2^2 = 0,$$

ou bien, d'après (11a),

$$at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2 = 0. \tag{15}$$

Donc, si le point $t_1 y + t_2 z$ est fondamental par rapport à la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ, la droite r est une tangente asymptotique de R et réciproquement.

En d'autres termes:

les points d'intersection de la quadrique osculatrice $H(p)$ avec $\bar{p}$ se trouvent situés sur les tangentes asymptotiques aux points fondamentaux de p, la famille $\mathfrak{R}$ correspondante étant Σ.

Il s'ensuit que les points d'intersection considérés séparent harmoniquement les deux points dans lesquels $\bar{p}$ coupe les plans tangents de R aux points harmoniques.

Seulement si R appartient à un complexe linéaire ($m = 0$) les points d'intersection de $\bar{p}$ avec $H(p)$ coïncident avec les deux points dans lesquels coupe $\bar{p}$ les plans tangents de R pris aux points des complex curves.

Le cas de M. Wilczynski a lieu si l'équation (15) possède les racins confondues, c'est à dire si

$$m^2 = \delta n^2 \quad \text{ou} \quad k^2 = 4h^3. \tag{16}$$

On en voit de nouveau que les invariants dans la théorie de M. E. Čech sont choisis d'une manière plus préférable que dans la théorie de M. Wilczynski. En effet la même relation géométrique s'exprime dans cette dernière théorie par [Wilczynski [4], p. 214, (49a)]

$$\Theta_4^3\Theta_9^2 + 16\Theta_{10}^3 = 0. \tag{17}$$

On reconnait sans peine de l'équation (16) que dans le cas actuel R est réelle seulement si $\delta = +1$; il en résulte que les courbes harmoniques de R sont réelles. Mais, si $\delta = +1$, on peut remplacer (16) soit par $m = n$, soit par $m = -n$.

Dans le premier cas la racine double de (15) est $t_1 : t_2 = 1 : 1$ et la courbe C_{y+z} est harmonique et asymptotique simultanément. Dans le second cas cette racine est $t_1 : t_2 = 1 : -1$ et la courbe harmonique C_{y-z} est asymptotique. En résumant on peut énoncer le théorème:

Si pour toutes les génératrices p de la surface réglée gauche R la quadrique osculatrice $H(p)$ touche la génératrice correspondante $\bar{p}$ de $\bar{R}$, alors une courbe harmonique C de R est asymptotique. Le point de contact de $\bar{p}$ et de $H(p)$ se trouve situé sur la tangente à C au point d'intersection de C avec p.

Mais l'existence d'une courbe harmonique qui est en même temps asymptotique est caractéristique pour les surfaces réglées gauches considérées; on peut donc regarder la propriété en question comme une définition. C'est M. O. Mayer ([3]) qui a trouvé la classe considérée de surfaces comme faisant partie d'une classe plus étendue de surfaces réglées gauches lesquelles il a nommé surfaces G. (Une surface G générale possède un couple d'asymptotiques séparées harmoniquement par les courbes harmoniques.)

On a donc le résultat suivant:

Les surfaces de M. Wilczynski dont la quadrique osculatrice $H(p)$ touche la génératrice $\bar{p}$ correspondante du $\bar{R}$ et

les surfaces G spéciales de M. O. Mayer, caractérisées par l'existence d'une courbe harmonique et en même temps asymptotique,

sont identiques. Une de ces deux propriétés, laquelle que ce soit, entraîne l'autre.

IV. Complétons les recherches du numéro précédent par une étude analogue de la quadrique $\bar{H}(\bar{p})$ osculatrice de $\bar{R}$ le long de $\bar{p}$.

La tangente asymptotique de la surface $\bar{R}$ au point $t_1\bar{y} + t_2\bar{z}$ est détérminée par le point $(t_1\bar{y} + t_2\bar{z})'$ où t_1, t_2 se dérivent d'après les équations différentielles des asymptotiques de la surface $\bar{R}$, c'est à dire, en conséquence de (9a, b, c), d'après les équations

$$t'_1 = \left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m\right]t_1 + nt_2,\quad t'_2 = -\delta nt_1 - \left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m\right]t_2.$$

Il en résulte

$$(t_1\bar{y} + t_2\bar{z})' = \left\{\left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m\right]t_1 + nt_2\right\}\bar{y} + \left\{-\delta nt_1 - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m\right]t_2\right\}\bar{z} + t_1\bar{y}' + t_2\bar{z}'.$$

Si l'on exprime, en se servant des équations (4a) et (5a), que les points $y, z, t_1\bar{y} + t_2\bar{z}, (t_1\bar{y} + t_2\bar{z})'$ ne sont pas linéairement indépendents, on obtient

$$\begin{vmatrix} -(3n'+4mn), & -4\delta n^2, & 2n, 0 \\ 4n^2, & 4mn-3n', & 0, 2n \\ t_1, & t_2, & 0, 0 \\ \left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m\right] t_1 + nt_2, & -\delta nt_1 - \left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' - m\right] t_2, & t_1, t_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\delta nt_1^2 - \left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' + 2m\right] t_1t_2 + nt_2^2 = 0. \tag{18}$$

Le couple de tangentes asymptotiques de $\overline{R}$ aux points déterminés par (18) coupe p en deux points qui appartient au $\overline{H}(\overline{p})$.

$\tau_1 y + \tau_2 z$ étant un des points cherchés, pour déterminer $\tau_1 : \tau_2$ il suffit d'exprimer que ce point appartient au plan tangent à $\overline{R}$ dans un de points donnés par (18). Si on remplace t_1, t_2 dans (18) par τ_1, τ_2 d'après (13), on obtient

$$\delta na_0^2\tau_1^2 - a_0a_4\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' + 2m\right]\tau_1\tau_2 + na_4^2\tau_2^2 = 0. \tag{19}$$

$\overline{H}(\overline{p})$ touche p si

$$\left[\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' + m\right]^2 - \delta n^2 = 0. \tag{20}$$

Dans ce cas l'équation (18) possède une seule racine $t_1 : t_2$ double et le point $t_1 y + t_2 z$ correspondant est un des points harmoniques de la surface R situés sur p.

On conclut de (20) que $\delta = +1$ si R est réelle et en conséquence que les courbes harmoniques des surfaces de cette classe sont réelles. Il en résulte que (20) est satisfaite en conséquence d'une relation plus simple, c'est à dire soit de

$$\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' + m = n,$$

soit de

$$\frac{1}{4}\left(\ln\frac{a_0}{a_4}\right)' + m = -n.$$

Dans le premier cas la racine double de (18) est $t_1 : t_2 = 1 : 1$, dans le second cas cette racine est $t_1 : t_2 = 1 : -1$.

En résumant on peut énoncer les théorèmes:

a) Soient M, N les points d'intersection de la quadrique $\overline{H}(\overline{p})$ avec p et soient M' et N' les points de la génératrice $\overline{p}$ où les plans $(M\overline{p})$ et $(N\overline{p})$ touchent $\overline{R}$. Enfin soient M'' et N'' les points de p où les *plans $(M'p)$ et $(N'p)$ touchent R. Alors M'' et N'' séparent harmoniquement les points harmoniques de p.*

b) Soit M le point de contact de p et de $\overline{H}(p)$ et soit M' le point de contact du plan $(M\overline{p})$ avec $\overline{R}$. Soit enfin M'' le point de p où le plan $(M'p)$ touche R. Alors M'' est un point harmonique de p.

IV. La signification géométrique de la droite $r = (t_1y + t_2z, t_1\overline{y} + t_2\overline{z})$ est très simple: c'est la tangente à la courbe de la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ au point $t_1y + t_2z$.

Nous avons vu que, dans le cas général, la droite r ne touche pas $\overline{R}$ en $t_1\overline{y} + t_2\overline{z}$. En se rappelant la signification géométrique de l'équation (13) on en conclut que r touche $\overline{R}$ si

$$a_0 = a_4 \tag{21}$$

et dans ce cas seulement.

Mais on a

$$a_0 - a_4 = 8n\,(mn' - nm' + n).$$

En conséquence de la supposition $n \neq 0$ on peut remplacer l'équation (21) par

$$mn' - nm' + n = 0. \tag{22}$$

D'après (9a, b, c) et en tenant compte de (21) on trouve

$$\overline{a} = a,\ \overline{b} = b,\ \overline{c} = c, \tag{22a}$$

d'où l'on conclut que les droites $r = (t_1y + t_2z, t_1\overline{y} + t_2\overline{z})$ engendrent une congruence W dont les surfaces focales sont R et $\overline{R}$.

Évidemment, il suffit de démontrer que les asymptotiques se correspondent dans la correspondance qui fait associer au point $t_1y + t_2z$ le point $t_1\overline{y} + t_2\overline{z}$. Mais, les équations des asymptotiques étant identiques pour les deux surfaces considérées, en conséquence de (22a), la congruence de droites r est en effet une congruence W.

De là on déduit que dans ce cas la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ de la surface R est axiale en vertu de (22). En effet, R étant donnée par le système canonique (1a, b), on a $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ (Čech [1], p. 228). Si l'on introduit ces expressions dans les équations (12) et qu'on fait usage de (11a), les équations (12) se réduisent à une seule, c'est à dire à (22).

On a donc en résumé:

Une surface réglée gauche R dont la famille $\mathfrak{R}$ principale Σ est axiale est caractérisée par la relation (22). Si R est de cette classe, les tangentes aux courbes de Σ engendrent une congruence W dont les surfaces focales sont R et une autre surface réglée gauche $\overline{R}$, qui peut être définie aussi comme le lieu de droites d'intersection des plans osculateurs des courbes flecnodales aux flecnodes situés sur une génératrice de R.

Pour abréger le langage j'appelle les surfaces de cette classe les surfaces K.

La relation (22) qui caractérise les surfaces K est équivalente à

$$3kh' - 2hk' + 8h^2 = 0, \tag{22b}$$

qui peut être vérifiée aisément en se rappelant les relations [Čech [1], p. 228, (6)]

$$m = \frac{k}{4h'}, \qquad 4\delta n^2 = h.$$

Les surfaces K dépendent d'un signe $\delta = \pm 1$ et d'une fonction arbitraire $\beta(v)$ (la seule supposition nécessaire est $\beta'(v) \neq 0$), la condition (22) étant satisfaite identiquement par

$$m = \frac{\beta}{\beta'}, \qquad n = \frac{1}{\beta'}, \tag{23a}$$

d'où il résulte

$$h = 4\delta\beta'^{-2}, \qquad k = 16\delta\beta\beta'^{-3}. \tag{23b}$$

V. Enfin nous allons donner une application des formules (9a, b, c, d, e, f, g) à la solution du problème suivant:

Déterminer la classe de surfaces réglées gauches R pour lesquelles la $\overline{R}$ correspondante est une quadrique.

On sait que $\overline{R}$ est une quadrique si

$$\overline{A} = \overline{B} = \overline{C} = 0. \tag{24}$$

D'après (9d, e, f) on a

$$\delta\overline{A} - \overline{C} = 2n\left(\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a'_4}{a_4}\right),$$

d'où l'on tire en annulant ($n = 0$ est exclu)

$$a_0 : a_4 = \lambda : \mu, \tag{25}$$

λ, μ étant deux constantes non nulles.

En tenant compte de (25), les équations (24)

$$\overline{C} = 4n' - n\frac{a'_0}{a_0} = 0,$$

$$\overline{A} = 4n' - n\frac{a'_4}{a_4} = 0,$$

donnent

$$a_0 = \lambda n^4, \; a_4 = \mu n^4. \tag{26a, b}$$

De

$$\overline{B} = 0$$

il résulte

$$(\lambda - \mu)\, n^3 - 8nm' + 8mn' = 0. \tag{26c}$$

Les conditions pour que $\overline{R}$ soit une quadrique étant exprimées par le système d'équations différentielles (26a, b, c), posons pour les intégrer

$$\frac{m}{n} = \alpha.$$

Par cette substitution (26c) se transforme en

$$8\alpha' = (\lambda - \mu)\, n. \tag{27}$$

Tout d'abord excluons le cas $\lambda - \mu = 0$, car il entraîne $n = 0$. Il reste

$$n = \frac{8\alpha'}{\lambda - \mu}, \qquad m = \frac{8\alpha\alpha'}{\lambda - \mu}. \tag{28a, b}$$

De l'équation

$$a_0 - a_4 = (\lambda - \mu)\, n^4,$$

c'est à dire de

$$8\,(n - m'n + mn') = (\lambda - \mu)\, n^3$$

on déduit d'après (28a, b)

$$16\alpha'^3 = (\lambda - \mu)\, \alpha'.$$

On peut exclure $\alpha' = 0$ en conséquence de la supposition $n \neq 0$. La relation précédente devient alors

$$16\alpha'^2 = \lambda - \mu.$$

Il en résulte aisément

$$\alpha' = \frac{\sqrt{\lambda - \mu}}{4}$$

d'où l'on a

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda - \mu}}{4}\, v.$$

La constante d'intégration peut être négligée, v n'étant défini qu'à une constante additive près.

En remplaçant dans (28a, b) α par la fonction trouvée de v on a deux invariants

$$n = \frac{2}{\sqrt{\lambda - \mu}}, \qquad m = \tfrac{1}{2} v.$$

Enfin la relation

$$a_0 + a_4 = (\lambda + \mu)\, n^4$$

nous donne le troisième invariant j sous la forme

$$j = \frac{8\delta - \lambda - \mu}{2\,(\lambda - \mu)},$$

où $\delta = \pm 1$. Remarquons que les invariants n et j ne dépendent pas de v, c'est à dire ils sont des constantes.

Tous les invariants étant déterminés, le système canonique flecnodal correspondant à une surface R de la classe cherchée a la forme

$$\left.\begin{aligned} y'' &= vy' + \frac{4\delta}{\sqrt{\lambda-\mu}}z' + \left(-\frac{v^2}{4} + \frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)y, \\ z'' &= -\frac{4}{\sqrt{\lambda-\mu}}y' - vz' + \left(-\frac{v^2}{4} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)z, \\ &(\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0,\ \lambda \neq \mu,\ \delta = \pm 1). \end{aligned}\right\} \quad (29a, b)$$

On voit de là que chaque surface R de cette classe est déterminée par deux constantes λ, μ et un signe $\delta = \pm 1$.

Les équations (9a, b, c) donnent encore

$$\bar{a} = \frac{2\delta}{\sqrt{\lambda-\mu}},\ \bar{b} = -\tfrac{1}{2}v,\ \bar{c} = \frac{2}{\sqrt{\lambda-\mu}}. \quad (30)$$

Enfin en exprimant $\bar{j}$ d'après (9g) on obtient de (8a, b)

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}''_1 &= v\bar{y}'_1 + \frac{4\delta}{\sqrt{\lambda-\mu}}\bar{z}'_1 + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\bar{y}_1, \\ \bar{z}''_1 &= -\frac{4}{\sqrt{\lambda-\mu}}\bar{y}'_1 - v\bar{z}'_1 + \frac{\mu}{\lambda-\mu}\bar{z}_1. \end{aligned}\right\} \quad (30a, b)$$

La surface $\bar{R}$ déterminée par le système précédent est en effet une quadrique. Nous voulons vérifier cette proposition.

A ce but il suffit de démontrer que la courbe $C_{\bar{x}}$, où $\bar{x} = t_1\bar{y}_1 + t_2\bar{z}_1$, et où $t_1 : t_2$ satisfait aux équations des asymptotiques de $\bar{R}$, c'est à dire aux équations

$$\left.\begin{aligned} t'_1 &= -\tfrac{1}{2}vt_1 + \frac{2}{\sqrt{\lambda-\mu}}t_2, \\ t'_2 &= -\frac{2\delta}{\sqrt{\lambda-\mu}}t_1 + \tfrac{1}{2}vt_2, \end{aligned}\right\} \quad (31a, b)$$

est rectiligne.

D'après (31a, b) on a

$$\bar{x}' = (t_1\bar{y} + t_2\bar{z})' = t'_1\bar{y}_1 + t'_2\bar{z}_1 + t_1\bar{y}'_1 + t_2\bar{z}'_1 =$$
$$= \left(-\tfrac{1}{2}vt_1 + \frac{2}{\sqrt{\lambda-\mu}}t_2\right)\bar{y}_1 + \left(\frac{-2\delta}{\sqrt{\lambda-\mu}}t_1 + \tfrac{1}{2}vt_2\right)\bar{z}_1 + t_1\bar{y}'_1 + t_2\bar{z}'_1.$$

En dérivant de nouveau on obtient, en tenant compte des équations (30a, b) et (31a, b),

$$\bar{x}'' = \left(\frac{v^2}{4} + \frac{\lambda+\mu-8\delta}{2(\lambda-\mu)}\right)\bar{x}. \quad (32)$$

Donc, tous les points qui décrivent les asymptotiques de $\bar{\bar{R}}$ satisfont à l'équation linéaire différentielle ordinaire du deuxième ordre (32). On en conclut que tous les asymptotiques en effet sont rectilignes. Elles engendrent la demiquadrique complémentaire à la demiquadrique décrite par $\bar{p}$.

Les surfaces R de la classe considérée ont bien de propriétés remarquables. Bornons nous à une de ces propriétés qui est une conséquence simple des relations

$$\bar{a} = a,\ \bar{b} = b,\ \bar{c} = c,$$

qui résultent de (9a, b, c) et (25). En les interprétant géométriquement on trouve le théorème suivant:

Soit R une surface réglée gauche, soit $\bar{R}$ la surface correspondante de droites d'intersection de plans osculateurs des courbes flecnodales. Soit $\bar{\bar{R}}$ une quadrique, soit x un point qui décrive une asymptotique de R. Si en un moment x rencontre une génératrice p de R, le plan tangent en x à R coupe la génératrice $\bar{p}$ correspondante de $\bar{R}$ dans un autre point $\bar{x}$. Alors le point $\bar{x}$ décrive une droite de la demiquadrique complémentaire à $\bar{R}$.

*

O zborcených plochách, jejichž fleknodální čáry jsou různé a žádná není rovinná.

(Résumé předchozího článku.)

Hlavním předmětem studia v předchozím článku jest přímková plocha $\bar{R}$, která je z dané zborcené přímkové plochy R sestrojena takto:

Je-li $p = (y, z)$ tvořící přímka plochy R, y a z fleknody na p, $\bar{\eta}$ a $\bar{\zeta}$ oskulační roviny fleknodálních čar C_y a C_z v bodech y a z, pak průsečnice $\bar{p} = (\bar{\eta}, \bar{\zeta})$ rovin $\bar{\eta}$ a $\bar{\zeta}$ nechť jest tvořící přímkou (příslušnou ku p) plochy $\bar{R}$.

Platí věta:

Nutná (a zřejmě i postačující) podmínka rozvinutelnosti plochy $\bar{R}$ jest, aby alespoň jedna fleknodální čára na R byla rovinná (odst. I).

Za předpokladu, že $\bar{R}$ je zborcená, odvodí se snadno základní rovnice a základní veličiny Čechovy teorie pro $\bar{R}$ [odst. II, rovnice (8a, b), (9a, b, c, d, e, f, g)]. Z nich lze vyčísti mnohé geometrické vztahy mezi R a $\bar{R}$ a studovati případy zvláštní. Tak bylo odvozeno (odst. III):

Platí-li pro všechny přímky p plochy R, že hyperboloid $H(p)$, oskulující R podél p, se dotýká odpovídající přímky $\bar{p}$ plochy $\bar{R}$ (případ studovaný Wilczynským), pak jedna z harmonických křivek na R jest asymptotikou (případ studovaný O. Mayerem). Bod styku $\bar{p}$ s $H(p)$ leží na tečně této křivky v jejím bodě na p. Třída ploch, charakterisovaná Wilczynským, je totožna s třídou Mayerových ploch G speciálních, na nichž jedna křivka harmonická jest asymptotická (obecnou plochu G definuje Mayer požadavkem, aby na ní existovaly 2 asymptotiky oddělující harmonicky čáry harmonické).

Podobné vztahy platí mezi hyperboloidem $\bar{H}(\bar{p})$, oskulujícím $\bar{R}$ podél $\bar{p}$ a plochou R (odst. IV).

Nazveme-li s O. Mayerem soustavou $\mathfrak{R}$ takovou soustavu křivek na R, jejíž křivky vytínají na tvořících přímkách bodové řady projektivní (na př. asymptotiky), pak fleknodální, komplexové a harmonické čáry zřejmě náležejí téže soustavě $\mathfrak{R}$, již nazveme — opět podle O. Mayera — hlavní soustavou $\mathfrak{R}$ plochy R.

Pak pravíme, že R náleží třídě K (odst. V), když hlavní soustava $\mathfrak{R}$ plochy R jest axiální (t. j. tečny k jejím křivkám tvoří kongruenci W s fokálními plochami přímkovými). Příslušná kongruence W má zřejmě v R jednu plochu fokální; v odst. V se dokazuje, že druhou fokální plochou jest v tomto případě plocha $\bar{R}$, dříve definovaná jako místo průsečnic oskul. rovin fleknodálních čar plochy R.

Konečně lze položiti otázku (odst. VI), kdy $\bar{R}$ jest kvadrika (přesněji regulus). Fleknodální kanonický tvar základních rovnic plochy R, k níž příslušná $\bar{R}$ jest regulus, jest (27a, b). Z něho je patrno, že plochy R tohoto druhu závisí na dvou konstantách (λ, μ) a jednom znaménku $(\delta = \pm 1)$. Z četných vztahů mezi R a $\bar{R}$ snadno vyplývá [z rovnic (9a, b, c) a (28)] tento:

Nechť pohyblivý bod x na R opisuje asymptotiku. Nechť v určitém okamžiku tento bod leží na p, tečná rovina v něm k R nechť seče odpovídající $\bar{p}$ na $\bar{R}$ v bodě $\bar{x}$. Pak bod $\bar{x}$ opisuje přímku regulu komplementárního k $\bar{R}$.

Travaux cités.

[1] *G. Fubini-E. Čech:* Geometria proiettiva differenziale, Tomo primo, Bologna 1926.

[2] *G. Klapka:* Sur la surface principale de Wilczynski et généralisation du théorème de Sullivan, *Časopis pro pěst. matem. a fysiky LVIII*, Prague 1928 (en tchèque avec un résumé en français).

[3] *O. Mayer:* Étude sur les surfaces réglées, *Buletinul Facultatii de Stiinte din Cernauti 2, 1928*, p. 1—33.

[4] *E. J. Wilczynski:* Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Leipzig 1926.