Ota Fischer

Odvození ortogonálních polynomů ze zákona Polyova

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 205--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123575

On a par exemple pour le moment m_n une formule recurrente

$$m_{n+1} = h\left[m_n + \binom{n}{1} m_{n-1} + \binom{n}{2} m_{n-2} + \ldots + \binom{n}{1} m_1 + m_0\right]$$
$$+ d\left[\binom{n}{1} m_n + \binom{n}{2} m_{n-1} + \ldots + \binom{n}{1} m_2 + m_1\right]$$

et pour le moment incomplet ${}_t m_n$ la formule

$${}_t m_{n+1} = (1 + d)\, t^{n+1}\, \mathrm{f}(t) + h\left[{}_t m_n + \binom{n}{1} {}_t m_{n-1} + \binom{n}{2} {}_t m_{n-2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{n}{1} {}_t m_1 + {}_t m_0\right]$$
$$+ d\left[\binom{n}{1} {}_t m_n + \binom{n}{2} {}_t m_{n-1} + \ldots + \binom{n}{1} {}_t m_2 + {}_t m_1\right],$$

où

$${}_t m_0 = \mathrm{f}(t) \,.\, \mathrm{F}\left(1, \frac{h}{d} + t, t + 1, \frac{d}{1 + d}\right).$$

On peut aussi déduire des critères pour decider si l'on peut représenter le collectif donné par la loi de Polya.

Odvození ortogonálních polynomů ze zákona Polyova.

Dr. *Ota Fischer,* Praha.

E. Hildebrand v práci „System's of Polynomials connected with the Charlier's Expansions and the Pearson's differential and difference Equation" v Annals of Mathematical Statistics 1931 ukázal, že lze frekvenční křivky s nespojitým argumentem zobecniti analogicky jako Romanovsky zobecnil křivky Pearsonovy a odvoditi z nich polynomy analogických vlastností jako polynomy získané Romanovskym. V tomto referátě aplikuji metodu Hildebrandovu na zákon Polyův.

Nechť frekvenční funkce $\mathrm{f}(x)$ definovaná pro $x = \alpha, \alpha + 1, \ldots, x = \beta$ není identicky rovna nule a nechť splňuje diferenční rovnici

$$\Delta\, \mathrm{f}(x) = \frac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}\, \mathrm{f}(x), \tag{1}$$

kde $\mathrm{N}(x)$ je polynom prvého, $\mathrm{D}(x)$ druhého stupně, pak funkce $\mathrm{p}_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{p}_n(x) = \frac{1}{\mathrm{f}(x)}\, \Delta^n[\mathrm{D}^{(n)}(x - 1)\, \mathrm{f}(x)] \tag{2}$$

je polynom n-tého stupně.

$$\mathrm{D}^{(n)}(x - 1) = \mathrm{D}(x - 1) \,.\, \mathrm{D}(x - 2)\, \mathrm{D}(x - 3) \ldots \mathrm{D}(x - n).$$

Polyův zákon splňuje diferenční rovnici

$$\Delta \, \mathrm{f}(x) = \frac{h - d - (x + 1)}{(1 + d)(x + 1)} \mathrm{f}(x), \tag{3}$$

tedy rovnici tvaru (1), kde

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(x) &= h - d - (x + 1) \\ \mathrm{D}(x) &= (1 + d)(x + 1) \end{aligned}$$

a tedy

$$\mathrm{p}_n(x) = \frac{(1 + d)^n}{\mathrm{f}(x)} \Delta^n [x^{(n)} \mathrm{f}(x)] \tag{4}$$

je polynom n-tého stupně.

Polynom $\mathrm{p}_n(x)$ lze psáti ve formě

$$\mathrm{p}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-)^i \binom{n}{i} d^{n-i} \left(\frac{h}{d} + n - 1\right)^{(n-i)} x^{(i)} \tag{5}$$

tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_0(x) &= 1 \\ \mathrm{p}_1(x) &= h - x \\ \mathrm{p}_2(x) &= (h + d)\, h - 2\,(h + d)\, x + x\,(x - 1) \\ \mathrm{p}_3(x) &= (h + 2d)(h + d)\, h - 3\,(h + 2d)(h + d)\, x + \\ &\quad + 3\,(h + 2d)\, x\,(x - 1) - x\,(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

. . . .

Polynomy $\mathrm{p}_n(x)$ tvoří v intervalu $(0, \infty)$ posloupnost ortogonálních polynomů o charakteristické funkci $\mathrm{f}(x)$.

$$S_{nm} = \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{p}_n(x)\, \mathrm{p}_m(x) \mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } n \neq m \\ \neq 0 \text{ pro } n = m \end{cases}$$

$$S_{nn} = n!\, d^n (1 + d)^n \left(\frac{h}{d} + n - 1\right)^{(n)}. \tag{6}$$

Z ortogonální vlastnosti polynomů $\mathrm{p}_n(x)$ vyplývá, že mezi třemi následujícími polynomy $\mathrm{p}_{n-1}(x)$, $\mathrm{p}_n(x)$, $\mathrm{p}_{n+1}(x)$ platí rekurentní formule

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_{n+1}(x) &= [n\,(1 + 2d) + h - x]\, \mathrm{p}_n(x) - n\,(1 + d)\,(h + \\ &\quad + (n - 1)\, d)\, \mathrm{p}_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Polynomy $\mathrm{p}_n(x)$ splňují diferenční rovnici

$$[h + (x+1)\, d]\, \Delta^2 \mathrm{p}_n(x) + (h+n - 1 - x)\, \Delta \mathrm{p}_n(x) + n \mathrm{p}_n(x) = 0 \tag{8}$$

V teorii kolektivních předmětů lze použíti polynomů $\mathrm{p}_n(x)$ takto: Empirickou frekvenční funkci $\mathrm{H}(x)$ $x = 0, 1, \ldots$ vyjádříme nekonečnou řadou

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{f}(x)\, [1 + A_1 \mathrm{p}_1(x) + A_2 \mathrm{p}_2(x) + \ldots + A_n \mathrm{p}_n(x) \ldots], \tag{9}$$

předpokládajíce, že je tento postup oprávněn.

Konstanty A_n se stanoví podle ortogononálních vlastností (6)

$$A_n = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{H}(x)\, \mathrm{p}_n(x)}{S_{nn}}.$$

Označíme-li $m'_{(i)}$ faktoriální moment funkce $\mathrm{H}(x)$ i-tého řádu a $m_{(i)}$ moment funkce $\mathrm{f}(x)$, máme, použijeme-li rovnic (5) a (6),

$$A_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} (-)^i \binom{n}{i} \frac{m'_{(i)}}{m_{(i)}}}{n!\,(1+d)^n}. \tag{10}$$

Stanovíme-li parametry h a d ve funkci $\mathrm{f}(x)$ podle Pearsonovy metody, totiž

$$h = m_{(1)}, \quad d = \frac{m_{(2)}}{m_{(1)}} - m_{(1)},$$

jest

$$A_1 = A_2 = 0.$$

Sur la méthode d'inversion en statistique mathématique.

S. Fogelson, Warszawa.

On sait, que la méthode la plus générale de description d'une distribution des fréquences (ou des probabilités) consiste en emploi de la fonction-somme (Summenfunktion, probability Integral), $\mathrm{V}(x)$, exprimant — selon le cas — la fréquence des valeurs observés ou la probabilité totale des valeurs d'une variable aléatoire, qui n'excèdent pas x. L'introduction de l'intégrale de Stieltjes permet alors d'analyser les distributions continues et discontinues par une méthode uniforme et générale.

Les propriétés de la fonction $\mathrm{V}(x)$, qui est une fonction non décroissante, et qui admet des limites finies 0 et 1 pour $x = \mp \infty$, permettent d'effectuer une inversion uniforme de cette fonction: en posant

$$w = \mathrm{V}(x) \tag{1}$$

on a inversement

$$x = \mathrm{f}(w), \tag{2}$$

f étant une fonction non décroissante, définie dans l'intervalle (0, 1). Les propriétés de cette fonction se déduisent facilement de celles de la fonction $\mathrm{V}(x)$. La fonction $\mathrm{f}(w)$ représente la distribution donnée des fréquences (ou des probabilités) aussi bien que la fonction $\mathrm{V}(x)$ et, dans un nombre de cas, elle se prête mieux aux différents calculs que cette dernière et facilite ainsi la résolution de certains problèmes. Ceci tient à ce que certaines gran-