Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Řešení některých rovnic rozdílových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 2, 69--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123513

Řešení některých rovnic rozdílových.

Napsal

M. Lerch,

docent v Praze.

1. Buď dána řada mocninová

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

konvergentní v jistém mezikruží O definovaném nerovnostmi:

$$\varrho < |x| < \varrho'.$$

Součin $(1 - x) f(x)$ lze uvésti na tvar

$$\Sigma\, a_n x^n - \Sigma\, a_n x^{n+1} = \Sigma\,(a_n - a_{n-1})\, x^n,$$

aneb na tvar

$$(1 - x) f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\, a_n \,.\, x^n, \tag{2}$$

znamenáme-li

$$\Delta\, a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Podobně bude

$$(1 - x)^2 f(x) = \Sigma\, \Delta^2 a_n \,.\, x^n,$$

znamenáme-li

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n-1}.$$

Píšeme-li pak dále

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n-1}, \quad \Delta^4 a_n = \Delta^3 a_n - \Delta^3 a_{n-1}, \text{ atd.},$$

obdržíme obecně

$$(1 - x)^m f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta^m a_n \,.\, x^n \,. \tag{2*}$$

Této okolnosti užijeme k řešení následující úlohy. Má se stanoviti řada veličin a_n, jež hoví *rovnici rozdílové*

$$\Delta^2 a_n = \frac{c}{n}\, a_n; \quad a_0 = 0. \tag{3}$$

Předpokládejme, že pro hledaná a_n řada

$$z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$$

konverguje v jistém mezikruží O. Pak máme ze (3)

$$\Sigma \Delta^2 a_n . x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c}{n} a_n x^n, \text{*)}$$

a odtud

$$\frac{d}{dx} \Sigma \Delta^2 a_n . x^n = \Sigma' c a_n x^{n-1},$$

takže máme, vyjádříme-li obě strany jich hodnotami:

$$\frac{d}{dx} [(1-x)^2 z] = \frac{cz}{x},$$

což jest differencialná rovnice pro stanovení neznámé funkce z. Klademe-li za účelem zjednodušení $u = (1-x)^2 z$, máme

$$\frac{du}{dx} = \frac{cu}{x(1-x)^2}$$

a odtud integrací, značí-li C konstantu,

$$lu = l\,C + c \int \frac{dx}{x(1-x)^2}$$

čili

$$u = C \frac{x^c}{(1-x)^c} e^{\frac{c}{1-x}},$$

odkudž

(3a) $$z = C \frac{x^c}{(1-x)^{c+2}} e^{\frac{c}{1-x}}.$$

Tuto funkci lze jen tehdy rozvinouti v řadu s celistvými mocnostmi x, je-li c samo číslem celistvým.

Tu máme pak

$$\frac{x^c}{(1-x)^{c+2}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha \binom{-c-2}{\alpha} x^{c+\alpha},$$

*) Čárka při znamení součtu Σ' značí, že dlužno vynechati člen $n = 0$.

a dále

$$e^{\frac{c}{1-x}}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{c^{\alpha}}{\alpha!\,(1-x)^{\alpha}}=\sum_{\alpha,\beta}(-1)^{\beta}\binom{-\alpha}{\beta}\frac{c^{\alpha}}{\alpha!}\,x^{\beta},$$

kde v součtu α, β probíhají řadu čísel 0, 1, 2, 3, ...

Odtud plyne

$$e^{\frac{c}{1-x}}=\sum_{\beta=0}^{\infty}b_{\beta}\,x^{\beta},$$

při čemž

$$b_{\beta}=(-1)^{\beta}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{\beta}\frac{c^{\alpha}}{\alpha!}. \tag{3b}$$

Spojením těchto výsledků máme

$$z=C\sum_{\alpha,\beta}(-1)^{\alpha}\binom{-c-2}{\alpha}b_{\beta}\,x^{\alpha+\beta+c},$$

$$(\alpha,\beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

a odtud porovnáním součinitelů při x^n:

$$a_n=C\sum_{\nu=0}^{n-c}(-1)^{\nu}\binom{-c-2}{\nu}b_{n-c-\nu}, \tag{3c}$$

takže rovnicemi (3b), (3c) je náš problém řešen.

2. Pokusme se nyní řešiti rovnici rozdílovou (3) pouze pro čísla $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, takže stačí se omeziti na zavedení veličin $a_0=0$, a_1, a_2, ... s kladnými indexy. Klademe-li zde

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x^n,$$

máme

$$(1-x)^2 z=a_1\,x+\sum_{n=2}^{\infty}\Delta^2 a_n x^n.$$

Rovnice (3) podá pak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Delta^2 a_n\,x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c\,a_n\,x^n}{n}$$

aneb

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=2}^{\infty}\Delta^2 a_n\,x^n=c\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,x^{n-1}.$$

Dosadíme-li sem pak hodnoty, máme

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2 z - a_1 x\right] = \frac{c\,z}{x} - a_1 c\,,$$

takže klademe-li

$$u = (1-x)^2 z\,,$$

máme pro stanovení této funkce differencialnou rovnici:

$$\frac{du}{dx} - \frac{c}{x(1-x)^2} z + a_1 (c-1) = 0\,, \tag{4}$$

jejíž obecný integrál zní:

$$u = \frac{x^c}{(1-x)^c} e^{\frac{c}{1-x}} \left[\mathrm{A} - \int a_1 (c-1)\, e^{-\frac{c}{1-x}} \frac{(1-x)^c}{x^c}\, dx\right],$$

při čemž A značí integrační stálou.

Předpokládáme-li, že c není číslem celistvým, a uvedeme-li integrál vnitřní na tvar

$$\int e^{-\frac{c}{1-x}} x^{-c} (1-x)^c\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^{\nu-c+1}, \tag{4a}$$

bude třeba voliti $\mathrm{A} = 0$, aby funkce z, tedy též funkce u byla rozvinutelna v řadu Maclaurinovu.

Volivše tedy $\mathrm{A} = 0$, obdržíme

$$z = a_1 (1-c) \frac{x^c}{(1-x)^c} e^{\frac{c}{1-x}} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^{\nu-c+1}\,, \tag{4b}$$

kterýžto výraz má skutečně tvar

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu\,.$$

Tu jedná se především o stanovení veličin b_ν.

Z rovnice (4a) máme

$$e^{-\frac{c}{1-x}} (1-x)^c = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1-c)\, b_\nu x^\nu$$

a odtud

$$b_\nu = \frac{1}{(\nu+1-c)\,2\pi i}\int e^{-\frac{c}{1-x}}(1-x)^c \frac{dx}{x^{\nu+1}},$$

kde integrace se děje v kladném směru podél malého kruhu, jehož střed jest v počátku. Rovněž není obtížno vyjádřiti b_ν pomocí řady.

Klademe-li v integrálu $\frac{1}{1-x} = z$, obdržíme

$$b_\nu = \frac{1}{(\nu+1-c)\,2\pi i}\int e^{-cz} z^{-c+\nu-1} \frac{dz}{(z-1)^{\nu+1}},$$

kde integrační cesta obíhá bod $z = 1$ v kladném směru. Odtud máme

$$(\nu+1-c)\,b_\nu = \frac{1}{\nu!}\left[D_z^\nu\left(e^{-cz} z^{-c+\nu-1}\right)\right]_{z=1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{n+\nu-c-1}{\nu}\frac{c^n}{n!}.$$

Abychom seznali analytickou povahu této veličiny, proveďme rozklad

$$\binom{n+\nu+c-1}{\nu} = \sum_{\alpha=0}^{\nu} g_\alpha(c)\,.\binom{n}{\nu},$$

platný identicky vůči n, takže $g_0(c), \ldots g_\nu(c)$ jsou celistvé racionalné funkce veličiny c.

Máme pak, znamenáme-li

$$B_\nu(c) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\nu+c-1}{\nu}\frac{c^n}{n!},$$

rozklad

$$B_\nu(c) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} g_\alpha(c)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\nu}\frac{c^n}{n!},$$

t. j.

$$B_\nu(c) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} g_\alpha(c)\,.\frac{c^\nu}{\nu!}\,.\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{c^{n-\nu}}{(n-\nu)!}$$

a tudíž posléze

$$B_\nu(c) = e^c \sum_{\alpha=0}^{\nu} g_\alpha(c) \frac{c^\nu}{\nu!} = G_\nu(c) \, . \, e^c,$$

kde $G_\nu(c)$ je celistvá racionalná funkce veličiny c. Máme pak

$$b_\nu = \frac{G_\nu(-c)\, e^{-c}}{\nu + 1 - c}.$$

Podobně nalezneme

$$e^{\frac{c}{1-x}} (1 - x)^{-c} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_\nu x^\nu,$$

kde pak

$$b'_\nu = G_\nu(c)\, e^c$$

a tedy máme dle (4b):

$$z = a_1 (1 - c) \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(c) x^\mu \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_\nu(-c)}{\nu + 1 - c} x^{\nu+1},$$

tedy posléze

$$a_n = a_1 (1 - c) \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{G_\nu(-c)\, G_{n-\nu-1}(c)}{\nu + 1 - c},$$

takže a_n je racionalnou funkcí veličiny c o jmenovateli

$$(c - 2)(c - 3) \ldots (c - n).$$

K výsledku tomu však dospějeme přímo sledováním definice

$$\Delta^2 a_n = \frac{c}{n} a_n,$$

t. j.

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{c}{n} a_n,$$

tedy

$$(5) \qquad (n - c)\, a_n - 2na_{n-1} + na_{n-2} = 0$$

pro $n = 2, 3, 4, \ldots$ za hypothese $a_0 = 0$.

Tu pak máme

$$(c-2)\,a_2 = -4a_1$$

$$(c-3)\,a_3 = 3a_1 - 6\,a_2 = 3\,a_1 + \frac{24\,a_1}{c-2}$$

$$(c-4)\,a_4 = 4a_2 - 8a_3 = -\frac{16\,a_1}{c-2} - \frac{24a_1}{c-3} - \frac{8\,.\,24\,a_1}{(c-2)\,(c-3)}$$

atd., při čemž zároveň nacházíme, že a_n je vůči c funkce ryze lomená.

Znamenáme-li

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \mathrm{A}_n\,,$$

obdržíme redukční vzorec:

$$\mathrm{A}_n = \frac{c-n}{-2n+n\,\mathrm{A}_{n-1}}\,,$$

a odtud řetězec:

$$\mathrm{A}_n = \cfrac{c-n}{-2n+\cfrac{n(c-n+1)}{-2n+2+\cfrac{(n-1)(c-n+2)}{-2n+4+\cfrac{(n-2)(c-n+3)}{-2n+6+\cfrac{(n-3)(c-n+4)}{-2n+8+\ldots\cfrac{2(c-2)}{-4}}}}}}$$

Podrobným stopováním naznačených zde rozvojů obdržely by se dosti zajímavé vlastnosti součinitelů binominalních, čímž však se zabývati nehodláme.

K podobným výsledkům vede studium rovnice $\Delta^2 a_n = c n a_n$ a jiných více.