Jan Vojtěch

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 1, 76--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123492

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu.

Dr. Jan Vojtěch v Brně.*)

1. Pozorujeme-li zjevy v přírodě i společnosti a uvažujeme-li o nich, nalézáme všude souvislost, závislost úkazů na jiných zjevech. Úmrtnost obyvatelstva na př. závisí na způsobu jeho života, majetkových poměrech, vzdělání, zdravotnických zařízeních a pod.: jestliže při stejných všech ostatních okolnostech rozhojní se a zlepší třebas opatření hygienická (nemocnice, odstraňování odpadků, vodovody, čištění ulic, opatření v případě nakažlivých nemocí atd.), zmenší se úmrtnost. Rozšíření a vzrůst rostlin závisí na jich okolí, na povaze půdy, ovzduší a j.; na př. rozměry, tvar a barva rostliny mění se s množstvím přijímaného světla a tepla. Poloha lístků akátových jest závislá na směru a síle paprsků světelných a tepelných; jest možno totiž pozorovati v létě, že lístky akátu stojí ráno plochou svojí kolmo k dopadajícím paprskům slunečním, zvolna potom otáčejí se tak, že v poledne stojí plochou rovnoběžně se směrem dopadu světla slunečního, večer pak zase kolmo, v noci konečně staví se dva a dva k sobě tak, že ztratí málo tepla. Vlivem kuchyňské soli v půdě vyvinují se u některých rostlin dužnatější listy a pod.

Nesčetné závislosti toho druhu jsou však příliš složité, dají se těžko číselně vyjádřiti, nebo jsou málo prozkoumané, takže můžeme často jenom udati, *že závislost existuje a jakého je smyslu.* Podobně uvádějí se některé vztahy fysikální na nižším stupni školním pouze jakostně (kvalitativně); na př. doba kyvu

*) Článek napsán (na vyzvání redakce) jako pokus vyložiti užití differenciálního počtu v geometrii žákům střední školy. Bylo hleděno k tomu, aby aspoň věcem základním mohl rozuměti i při nynějším plánu učebném žák od 5. třídy na reálce. Proto nebylo užito ani goniometrických funkcí, logaritmů, binomické věty a pod. Z téže příčiny vyloženy pojmy a poučky analytické geometrie, pokud jich potřeba. Aby bylo předpokladů co nejméně, odvozují se i základní derivace, ač bylo možno odkázati na článek dra. B. Bydžovského o diff. počtu v předešlém ročníku Časopisu (1906—7). Vlastnímu předmětu předchází úvod o grafickém zobrazování závislostí. Povahou věci je odůvodněno, že se neuvádějí prameny.

závisí u kyvadla na zrychlení zemské tíže (je větší, čím je menší zrychlení); třením, rázem a pod. vzniká teplo; intensita osvětlení je tím menší, čím šikměji paprsky dopadají.

2. Třebas některý zjev jest závislý na mnohých okolnostech a neznáme podrobně tuto závislost, můžeme nabýti aspoň určitější představy o zjevu samém, jestliže si *znázorníme* jeho *časový průběh.* Tak zaznamenává si na př. obchodník cenu určitého zboží, plodiny nebo výrobku, jednou za týden; nabude však jasnějšího a přehlednějšího obrazu o změnách v ceně

Obr. 1. Průběh průměrné ceny kopy čerstvých vajec během roku (52 týdnů, označeny také měsíce; 10 h. .... 1 *mm*).

během roku, sestrojí-li si vedle zmíněné tabulky průběh změn takovým způsobem: na přímku horizontální nanese od jistého bodu 52 stejně dlouhé úsečky, jichž počáteční body odpovídají po sobě jdoucím na př. pondělkům; v jednotlivých těch bodech vztyčí kolmice, na něž nanese postupně úsečky, znázorňující týdenní ceny; koncové body úseček těch spojíme k vůli lepšímu přehledu postupně úsečkami. Na obr. 1. znázorněn jest tímto způsobem průběh průměrné ceny 1 kopy čerstvých vajec (nejlepších) během roku (1907 na trhu vídeňském) dle zpráv obchodního časopisu; úsečka 1 *mm* představuje tam 10 h.

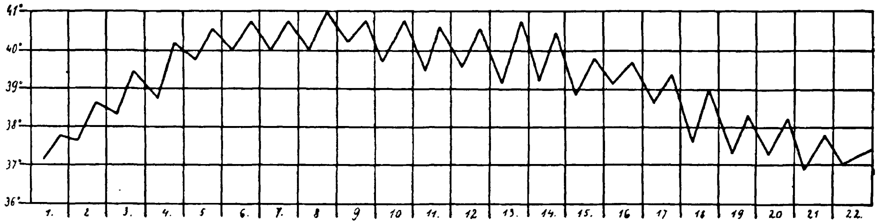
Stejným způsobem možno znázorniti průběh počtu narozených (zemřelých) dle týdenních zpráv úředních; možno si tak také utvořiti názorný přehled o tělesném vývoji novorozeněte, jestliže denně zaznamenáváme měnící se jeho váhu. A pod.

V uvedených příkladech šlo o zjevy nespojité; neboť cena zboží mění se po případě skokem, počet narozených může býti pouze číslo celé, váha dítěte se rozmanitě během dne mění (s přijímáním potravy a odcházením nestráveného, nutno tedy určovati váhu denně za okolností aspoň pokud možno stejných). Přes to jest vyložené znázornění poučné. Tím spíše při zjevech

Obr. 2. Průběh horečky při zápalu plic (směrem horiz. dni, vert. stupně teploty tělesné).

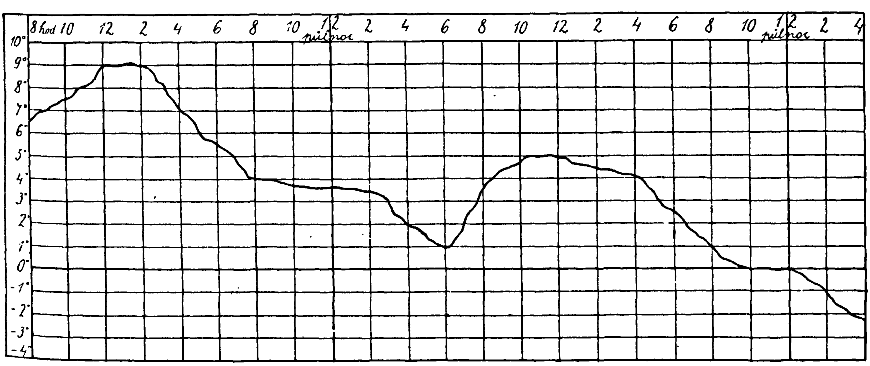
spojitě se měnících. Teplota člověka nemocného, stiženého horečkou, je dobrým ukazatelem průběhu nemoci; proto se měří třebas dvakrát denně; užijeme-li uvedeného znázornění, dostaneme klikatou čáru, která ovšem podává průběh teploty jen zhruba. Lépe by vyhovělo znázornění na základě měření každou hodinu, nejdokonaleji přístroj teplotu stále samočinně zaznamenávající. Obr. 2. a 3. obsahují temperaturní křivku horečky při zápalu plic (pneumonii) a tyfu střevním (abdominálním, hlavničce); obě ve svém celkovém tvaru (denní oscilace teploty u zdravého člověka činí asi 1° C) jsou charakteristické pro příslušnou nemoc, při zápalu plic teplota rychle stoupá a rychle klesá, při tyfu pomalu.

Změříme-li každou hodinu teplotu a tlak vzduchu, dostaneme poučné znázornění průběhu teploty (tlaku) po celý den (24 hodin). Tuto práci (měření a znázorňování) uspoří novější



Obr. 3. Průběh horečky při tyfu (měřítko vůči obr. 2. poloviční).

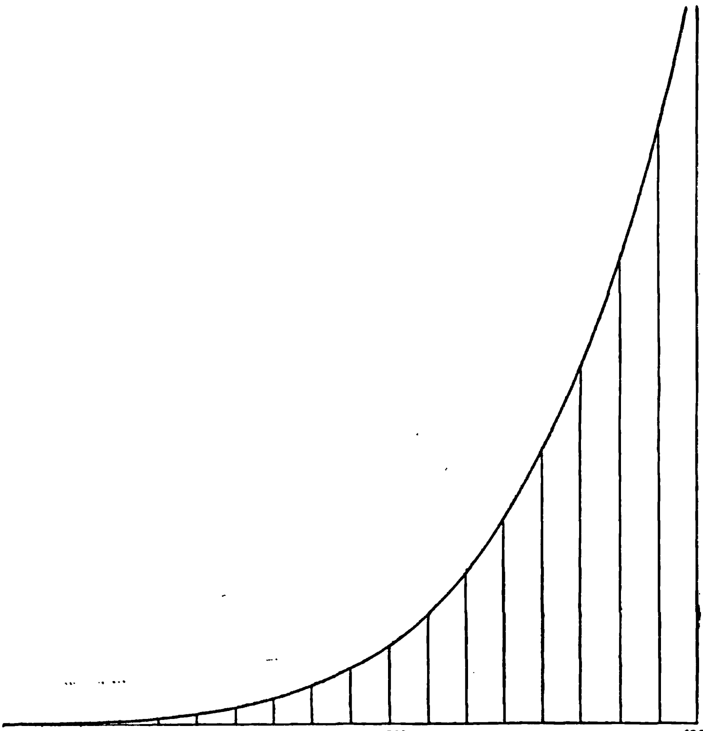
přístroje thermograf a barograf; podobně anemograf (zapisující rychlost větru) a j. v meteorologii, přístroje na samočinné zapisování tlaku krevního, činnosti srdeční, dýchání a pod. ve fysiologii, přístroje na zapisování intensity proudu v elektrických



Obr. 4. Průběh teploty během dvou dní (příklad).

centrálách atd. Křivka znázorňující na př. průběh teploty během dne je značně různá dle roční doby, dle počasí (stavu oblohy), dle místa na zemi (ve vnitrozemí, na moři, na horách); podobně křivka podávající roční průběh teploty. Na obr. 4. jest jako příklad křivka, narýsovaná dle thermogramu, jež udává běh teploty denní (v zimě za oblevy v Brně).

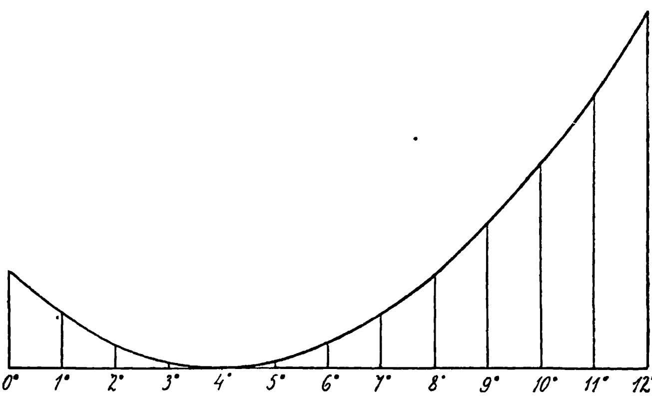
Znázornění, jehož několik příkladů uvedeno, umožněno je tím, že lze každou veličinu znázorniti úsečkou, jakmile zvolíme určitou úsečku jako znázornění jednotky oné veličiny. Pro různé veličiny, na sobě nezávislé, volno jest ovšem zvoliti různé jednotkové úsečky; volívají se tak, aby obraz byl zřetelný, při



Obr. 5. Závislost napjetí nasycených par vodních na teplotě (10^{0} . . . $\frac{1}{2}$ *cm*, 1 atmosféra . . . 1 *cm*).

malých změnách tedy větší; chceme-li několik křivek příslušných zjevům téhož druhu srovnávati, nutno ovšem voliti měřítko stejné. Že znázorňování veličin úsečkami je také při svojí jednoduchosti a právě pro ni velmi výhodné, poznáváme z toho, že méně názorná a přesná jsou rozmanitá jiná zobrazení, na př. poměrné velikosti států čtverci, množství daní různě velikými mincemi, množství potravy spotřebované člověkem za celý život, městem za den, přiměřeně velikým obrazem sudu pivního, bramboru, bochníku chleba, dobytčete a pod.

3. Dejme tomu, že máme v nádobě vodu, kterou zahříváme plamenem, třebas líhovým; její teplota stoupá a můžeme zase průběh těchto změn podati graficky. Zde sledujeme sice jenom časový průběh oteplování, poněvadž však lze za to míti, že plamen přivádí vodě stále stejné množství tepla, pozorujeme vlastně závislost tepelné výšky vody na množství přivedeného tepla. Podobně znázorňujeme (t. zv. vnější) vodivost tyče na



Obr. 6. Závislost objemu vody na teplotě v mezích 0°—12°; objem vody při 4° zvolen za základní, relativní přírůstek znázorněn úsečkou vertikální, při čemž 0·0001 naznačena úsečkou 1 *cm*.

jednom konci zahřívané, totiž tepelnou výšku jednotlivých míst po její délce za určitou dobu; závislost rozpustnosti solí na teplotě (směrem horizontálním nanášíme teplotu, směrem vertikálním množství rozpuštěné soli v 100 dílech vody, je-li roztok nasycený). Takovým způsobem se udává mezi mnohým jiným, jak závisí napjetí par nasycených (na př. vodních, líhových a j.) na teplotě; jedním směrem naneseme rostoucí teplotu, druhým směrem příslušná napjetí. V obr. 5. je tak znázorněna závislost expanse nasycených par vodních na teplotě. Zajímavá je také závislost objemu vody na teplotě, zvláště kol 4° *C* (obr. 6.).

V případech uvedených, které možno bez konce rozhojňovati, *znázorňuje křivka závislost dvou veličin fysikálních*; jest patrně možno zjevy přírodní v jejich mnohostranné a rozmanité souvislosti poznati pouze tím postupem, že sledujeme vždy jenom závislost dvou vlastností starajíce se, by ostatní zůstaly beze změny. Křivky nahoře dotčené sestrojeny jsou na základě četných měření, jež bývají sestavována také tabelárně; jsou ovšem údaje tabulky snad přesnější, ale grafické znázornění jest zase přehlednější a pro pochopení závislosti poučnější. Nutno ještě připomenouti, že měřením nalezeny byly vlastně jenom jednotlivé body křivek; tyto body spojujeme úsečkami nebo obloučky, jež by odpovídaly celkovému rozložení bodů, předpokládajíce dle zkušenosti, že zjevy přírodní probíhají zpravidla spojitě, bez skoků. Křivky tyto, t. zv. empirické (zkušeností získané) jsou také v některých případech dosud jediným přehledným vyjádřením zákona fysikálního; je to druhý stupeň dokonalosti přírodních zákonů.

4 V mnohých případech dovedeme však zákony fysikální podati dokonaleji, *stručným vzorcem mathematickým.* Tak víme — v případech uvedených v odst. 1. — že doba kyvu u kyvadla mathematického (při malých rozkyvech) $= \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l značí délku kyvadla, g zrychlení zemské tíže; 427 *kgm* práce vydá 1 velkou kalorii tepla; intensita osvětlení je úměrna svítivosti zdroje a kosinu úhlu dopadu přímo, vzdálenosti nepřímo atd. Jako na nižším stupni školního vyučování se omezujeme často na udání jakosti u některé závislosti, teprve na vyšším stupni udáváme ji určitěji ve formě mathematické, podobný postup byl v historickém vývoji našich vědomostí o závislostech zjevů přírodních. Avšak i při dokonalém vyjádření mathematickém zákona na př. fysikálního jest grafické znázornění vítanou a platnou pomůckou.

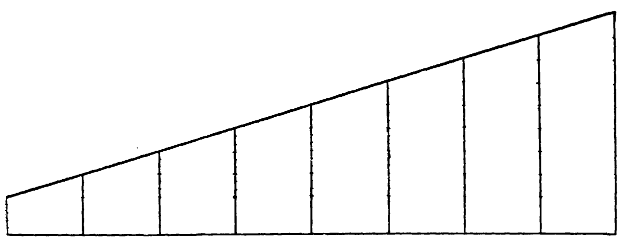
Všimněme si blíže příkladu už uvedeného; kahanem, jehož intensita tepelná se nemění, počneme zahřívati vodu třebas 5° teplou; koncem 1. minuty je její teplota 8°, koncem 2. už 11° atd., postup oteplování je udán tabulkou:

na počátku	5° *C*	za 5 min.	20°
za 1 min.	8° „	„ 6 „	23°
„ 2 „	11° „	„ 7 „	26°
„ 3 „	14° „	„ 8 „	29°
„ 4 „	17° „	atd.	

a grafickým znázorněním (obr. 7.) na základě tabulky. Značí-li písmeno y teplotu vody, písmeno x dobu v minutách, platí vztah

$$y = 3x + 5.$$

Rovnice tato vyjadřuje stručně závislost teploty vody na době zahřívání (a tedy vlastně na množství přivedeného tepla); mění-li se doba zahřívání, mění se také teplota vody, x i y *jsou veličiny proměnné*; dobu zahřívání volíme dle libosti, kdežto teplota vody jest na této době závislá, sluje proto y *závisle proměnnou*, x pak proti tomu je *nezávisle proměnnou.* Místo nezávisle proměnná říkáme *argument,* místo závisle proměnná říkáme *funkce*: y je funkce argumentu x a píšeme $y = f(x)$, písmeno f nebo

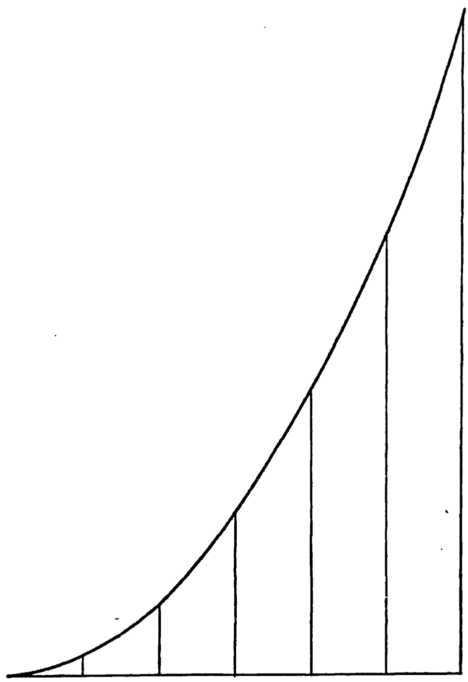


Obr. 7. Oteplování vody plamenem stejnoměrným: $y = 3x + 5$ (x = doba, 1 min. . . . 1 *cm*, y = teplota, 1^0 . . . 1 *mm*).

jiné je značkou závislosti, argument se k němu připisuje do závorky.

Při proměně uvedené mění se pouze doba zahřívání a teplota vody, všechny ostatní okolnosti zůstávají beze změny, na př. množství vody, způsob zahřívání atd.; z těchto okolností stálých dvě jsou vyjádřeny čísly, totiž číslem 3 zvýšení teploty za 1 minutu, číslem 5 původní teplota vody. Takové veličiny neměnící se slují *konstanty* zákona rovnicí vyjádřeného. Bývají to často obecná čísla (a, b, c, . . .); tytéž veličiny jindy mohou býti proměnnými.

Hořejší vzorec, ač jednoduchý, jest však obecnější než se na první pohled zdá, obecnější než tabulka pokusem získaná. Za x můžeme zvoliti totiž také na př. $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ a určiti příslušné $y = 3 \cdot \frac{5}{2} + 5 = 12\frac{1}{2}$, za 2 a půl minuty je teplota vody tedy $12\frac{1}{2}{}^0$, což nebylo měřením nalezeno; tak pouze soudíme opírajíce se o zkušenost, že zjevy přírodní jsou zpravidla spojité — jak už uvedeno. Ale za x zvolil by někdo třebas 30 nebo 50 minut a vypočetl $y = 95^0$ nebo $y = 155^0$; tím překročil by údaje, získané měřením, což není obecně dovoleno — v našem



Obr. 8. Závislost dráhy tělesa volně padajícího na době pohybu: $y = 490x^2$ (1 sek. . . . 1 *cm*, 1 *m* . . . $\frac{1}{2}$ *mm*).

případě ztrácí voda teplo z plamene přijaté zase poněkud do poměrně chladného okolí, tím více, čím větší je rozdíl teplot, a potom — vždyť při 100^0 voda vaří a spotřebuje dodávané teplo na proměnu skupenství nestoupajíc v teplotě. Správné bude, udáme-li, že proměnnost veličiny x leží v mezích 0 až 8 a podobně.

Tak vyšetříme pokusem závislost dráhy tělesa při volném pádu na době pohybu, získáme tabulku, obraz 8. i mathem. vzorec $y = ax^2$ (kde x značí dobu v sekundách, y dráhu v *cm*); v rovnici je ještě jedna veličina, konstanta a, která — jak známo — má u nás velikost asi $\frac{981}{2} = 490{\cdot}5$. Vzorec je všeobecně znám ve tvaru $s = \frac{g}{2} t^2$. Dráha při volném pádu je ovšem přímočará, jest třeba tedy rozlišovati od podaného grafického znázornění dráhu tělesa při šikmém vrhu.

Podobně známy jsou v neomezeném množství závislosti z geometrie. Obvod kruhu jest přímo úměrný poloměru jeho, vzorec $o = 2\pi r$ můžeme psáti ve formě $y = 2\pi x$ nebo $y = ax$; pro každou určitou hodnotu poloměru x dostaneme odtud určitou hodnotu obvodu y. Plocha kruhu je úměrna čtverci poloměru: $p = \pi r^2$ čili $y = \pi x^2$; krychlový obsah koule je úměrný trojmoci poloměru: $k = \frac{4}{3}\pi r^3$ čili $y = \frac{4}{3}\pi x^3$ nebo $y = ax^3$. Sestrojíme-li k danému trojúhelníku rozmanité trojúhelníky rovnoploché, jest jich výška nepřímo úměrna základně; neboť součin z výšky a základny, t. j. dvojnásobná plocha trojúhelníka, jest konstantní, $v \,.\, z = k$ čili $y \,.\, x = k$ čili $y = \frac{k}{x}$, kde x značí délku základny y velikost výšky.

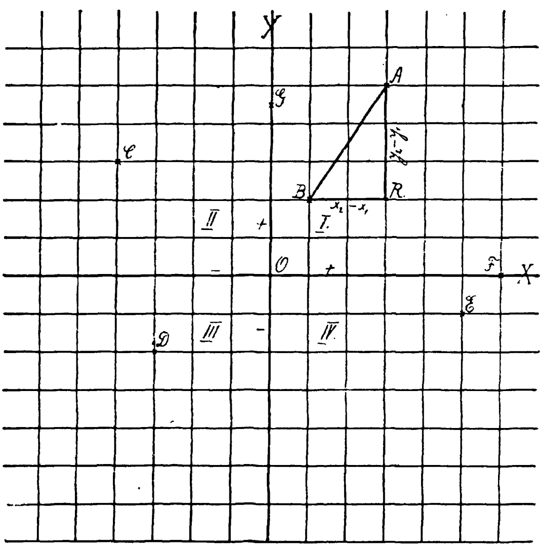
5. Chceme-li pro závislost, danou buď tabulkou nebo mathematickým vzorcem, zjednati si grafické znázornění, užíváme s výhodou *čtverečkovaného papíru*; jeho dílce, jich díly nebo násobky. zvolíme za jednotkové úsečky pro znázornění daného vztahu. Dvě přímky jeho, navzájem kolmé, zvolíme za osy: horizontální přímku nazveme osou X, vertikální osou Y, jich průsečík počátkem O. Úsečky měřené ve zvolené jednotce na ose X od počátku nazývati budeme *úsečkami* (v užším smyslu) čili souřadnicemi x a budou znázorňovati velikost nezávisle proměnné; úsečky měřené na ose Y od počátku (nebo rovnoběžné s ní od osy X) slouti budou *pořadnicemi* čili souřadnicemi y, znázorňujíce závisle proměnnou. Jednotková úsečka pro x nemusí býti táž jako pro y: při vztazích fysikálních a podobných, zvláště běží-li jen o zřetelné znázornění, také nebývá stejná pro obě veličiny; často však, při vztazích geometrických vždy, volíme jednotkovou úsečku stejnou pro x i y. Úsečky kladné měříme na ose X od počátku na pravo, záporné na levo; kladné pořadnice na ose Y od počátku nahoru, záporné dolů. Obě osy rozdělují rovinu papíru na čtyři pole čili čtvrti, jež postupně označujeme I.—IV., jak ukazuje obraz 9. Danou dvojicí hodnot

pro x a y je jednoznačně určen bod v rovině, upravené osami uvedeným způsobem; naopak každý bod v rovině má určité dvě souřadnice, vzdálenosti od os souřadných.

Tímto jednotným způsobem snadno znázorníme rozmanité dané vztahy $y = f(x)$. Mějte při tom na paměti zavedené názvy, zde znova sestavené:

pro-	nezávisle sluje v počtu x, na obr. úsečkou	souřad-
měnná	závisle „ „ y, „ pořadnicí	nicemi.

Tyto obrazy, znázorňujíce vztah $y = f(x)$, skládají se z jednot-



Obr. 9. Několik bodů v soustavě souřadnic na čtverečkovaném papíře.

livých bodů (x, y) t. j. bodů, jichž úsečka jest určité x a pořadnice y, vypočtená z onoho vztahu pro zvolené x (nebo k sobě patřící hodnoty z tabulky). Převádí se úkol tedy na sestrojování bodů, což jest velmi snadné. Na obr. 9. znázorněny jako příklad body A (3, 5), B (1, 2), C (—4, 3), D (—3, —2), E(5, —1), F(6, 0), G (0, 4·5).

Vzdálenost dvou bodů, na př. bodu A (3, 5) a B (1, 2) určíme z pravoúhlého trojúhelníka ABR, jehož odvěsny patrně mají délky $3 - 1 = 2$, $5 - 2 = 3$, a tedy přepona $\overline{AB}$ dle věty

Pythagorovy délku $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; obecně body (x_1, y_1), (x_2, y_2) mají vzdálenost $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, což platí vždy — záhodno se přesvědčit — ať body leží v kterýchkoli stejných nebo různých čtvrtích.

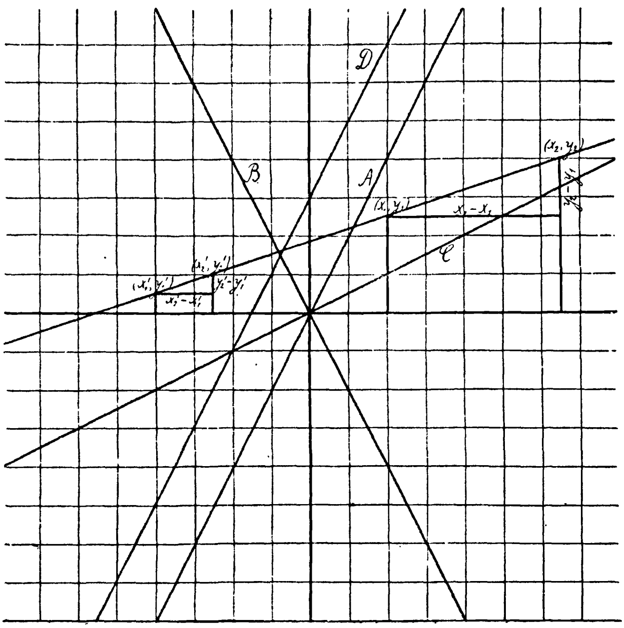
Ale také naopak možno jednoduché křivky v rovině narýsované na základě jich zákona výtvarného vyjádřiti rovnicí mezi x a y, tvaru na př. $x^2 + y^2 = r^2$, často také ve tvaru jednodušším $y = f(x)$.

6. Křivka narýsovaná jako znázornění vztahu $y = f(x)$, tedy závislosti dvou veličin fysikálních, geometrických a pod., má sloužiti k lepšímu, t. j. v částech důkladnějšímu a v celku přehlednějšímu pochopení závislosti té. Všimněme si předcházejících obrázků; na obr. 7. jest viděti, že křivka, jež znázorňuje závislost teploty vody zahřívané na době, sledujeme-li ji z levé strany k pravé, neustále stoupá, stoupá stále stejně, ba možno utvořiti si představu o rychlosti stoupání a číselně ji po případě udati. V obr. 8. proti tomu křivka stoupá, sledována týmž postupem, čím dále příkřeji; podobně v obr. 5. Křivka obr. 6. ukazuje ještě rozmanitější okolnosti; klesá s počátku, nabývá při 4^0 C nejnižšího místa, potom zase stoupá, při teplotě 4^0 má tedy voda nejmenší objem. Podobně při lomených čarách obr. 1.—3., konečně na obr. 4. lze činiti zajímavá pozorování.

I vzniká otázka, dovedeme-li tyto a podobné okolnosti při závislostech daných rovnicí $y = f(x)$, neb i obecnějším vztahem mezi x a y, udati *na základě takové rovnice bez grafického znázornění.* (Při závislostech, kde vztah mathematický neznáme, viz obr. 1.—6., otázka ovšem odpadá.) A poněvadž každá rovnice mezi x a y vyjadřuje nějakou křivku, vzniká úkol *udati vlastnosti* této *křivky*, týkající se tvaru i polohy, *bez rysu.* To jest pro nejjednodušší případy cílem tohoto článku; pravidla potřebná odvodíme ovšem tím, že majíce současně na zřeteli rysy i příslušné rovnice, budeme nahrazovati to, co možno viděti na obraze, znaky, jež po přiměřených výkonech početních dostaneme z rovnice. —

7. Znázorníme si teď graficky některé jednoduché funkce $y = f(x)$: zvolíme za x několik vhodných hodnot, na př. $x = -5$, potom -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 atd. a

vypočítáme příslušné hodnoty závisle proměnné y ze vztahu daného, čímž dostaneme řadu dvojic (x, y); sestrojíme potom body určené takto nabytými dvojinami souřadnic. Nepodávají-li sestrojené body dostatečnou představu o tvaru obrazu funkce, na př. v intervalu $x = 2$ až $x = 3$, sestrojíme body o úsečkách 2·1, 2·2, 2·3, . . . a pod.



Obr. 10. $A: y = 2x$; $B: y = -2x$; $C: y = \frac{1}{2}x$; $D: y = 2x + 3$; $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \ldots$ pro kteroukoli dvojici bodů.

Zobrazme nejprve funkce $y = 2x$, $y = -2x$, $y = \frac{1}{2}x$ (obr. 10.); poznáme, že obrazy jich A, B, C jsou vesměs přímky, procházející počátkem souřadnic. Avšak odchylka těchto přímek od osy X jest různá (stačí všimnouti si polohy jich vzhledem k jedné ose); úhel ten souvisí patrně s hodnotou součinitele u veličiny x. A vskutku, platí pro každý bod (x, y) přímky A, že $\frac{y}{x} = 2$, u B $\frac{y}{x} = -2$, konečně u C $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$;

poměr $\frac{y}{x}$ udává *stoupání přímky* vzhledem k horizontální ose X. Každá funkce tvaru $y = ax$ jest znázorněna přímkou, jež prochází počátkem a jejíž stoupání je dáno součinitelem a.

Pravíme obecně, že funkce (křivka) *stoupá, roste-li y s rostoucím x*, kdežto funkce (křivka) *klesá, zmenšuje-li se y s rostoucím x*. Funkce nejjednodušší $y = ax$ (přímka jdoucí počátkem) stoupá (stoupání v užším smyslu), je-li součinitel u x kladný, klesá v případě, kdy je < 0 (v našich případech A, C stoupají, B klesá); neboť pro kladné x jest u přímky (od počátku) stoupající y kladné, u přímky klesající záporné, a proto poměr $\frac{y}{x} = a$ rovněž v prvním případě kladný, v druhém záporný; a naopak.

Sestrojme obraz funkce obecnější $y = 2x + 3$ (obr. 10.). Body tohoto obrazu obdržíme buď obyčejným postupem, nahoře uvedeným, nebo kratčeji, zvětšíme-li pro každé x příslušnou pořadnici přímky A ($y = 2x$) o délku 3. Obraz funkce nové tedy dostaneme, pošineme-li všechny body přímky A o stejnou délku kladným směrem osy Y; je to proto také přímka (D), téhož stoupání jako A. Její poloha vzhledem k osám souřadnicovým je dána stoupáním a úsekem na ose Y. Obraz každé funkce tvaru $y = ax + b$ je přímka, jejíž stoupání je takové jako u $y = ax$ a úsek na ose Y jest $= b$. O smyslu stoupání přímky v obecné poloze $y = ax + b$ rozhoduje patrně opět znaménko součinitele u x (nastalo totiž jen rovnoběžné pošinutí), avšak součinitel tento není už dán poměrem $\frac{y}{x}$.

Abychom vyšetřili stoupání přímky obecně položené nezávisle na předcházejícím, zvolme na přímce dva body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) tak, že $x_2 > x_1$; i udává zde patrně *stoupání přímky* poměr $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (viz obr. 10.). Rozdíl $x_2 - x_1$ jest vždy kladný, avšak rozdíl $y_2 - y_1$ jest u přímky stoupající (y roste s rostoucím x) kladný, u přímky klesající (y se zmenšuje s rostoucím x) záporný; poměr $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tedy v prvním případě kladný, v druhém záporný. Tento poměr sluje *směr-*

nice přímky $y = ax + b$; jest $= a$, neboť pro první bod platí $y_1 = ax_1 + b$, pro druhý $y_2 = ax_2 + b$, odtud rozdíl $y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$ a tedy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$. I máme pravidlo: Přímka $y = ax + b$ stoupá pro $a > 0$, klesá pro $a < 0$; má-li směrnice střední hodnotu 0, nestoupá přímka ani neklesá, $y = b$, přímka je rovnoběžná s osou X ve vzdálenosti b. (Ve zvl. případě $b = 0$ jest $y = 0$ rovnice osy X.)

Na obraze přímky posuzujeme často stoupání dle velikosti úhlu, jejž svírá přímka s osou X, čím je tento úhel větší, tím větší je — pravíme — stoupání přímky; a vskutku souhlasně je tím větší také směrnice $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, při stálém $x_2 - x_1$ je totiž větší $y_2 - y_1$. U přímky klesající je směrnice záporná a tím větší, čím je absolutně (bez znaménka) menší; zde mohlo by se zdáti, že k větší směrnici patří menší úhel; abychom zůstali v souhlasu s úměrností nahoře uvedenou, musíme voliti určitěji úhel s kladným směrem osy X. Potom patří k větší (s ohledem na znaménko) směrnici také větší úhel, ale jen při kladných hodnotách směrnice zvlášť a zvlášť při záporných. Zvětšuje-li se úhel přímky s kladným směrem osy X od 0^0 do 90^0, zvětšuje se kladná směrnice od 0 do ∞; zvětšuje-li se úhel dále od 90^0 do 180^0, roste záporná směrnice od nejmenších hodnot (od $-\infty$) do 0 ($\ldots -50, -40, \ldots -4, -3, -2, -1, 0$), přímka klesá čím dále tím méně příkře („stoupání se stává větší“).

Nyní můžeme snadno nalézti rovnici přímky jdoucí dvěma danými body; libovolný bod přímky ve spojení s prvním daným bodem musí udávati touž směrnici přímky jako oba dané body samy, t. j.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Rovnice přímky určené dvěma danými body (x_1, y_1), (x_2, y_2) je tedy

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

čili

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1.$$

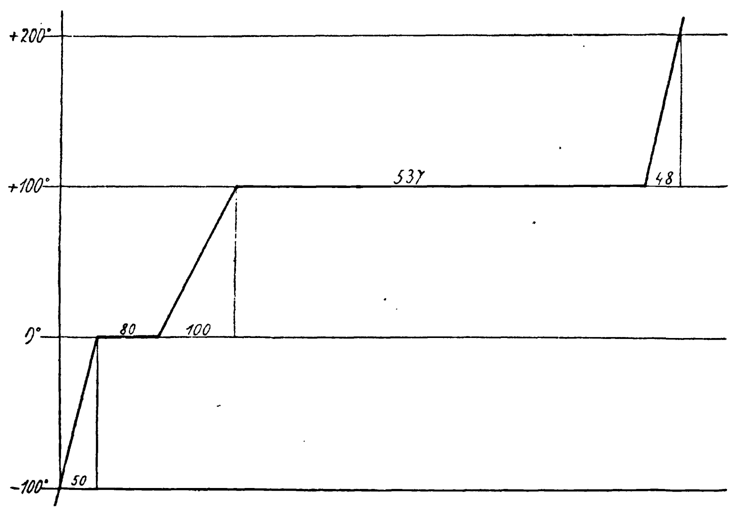
Výraz $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pro směrnici přímky $y = ax + b$ píšeme ještě jinak. Dejme tomu, že vzroste-li x o přírůstek Δx (čti delta x, značí přírůstek proměnné veličiny x), vzroste zároveň y o Δy (přírůstek závisle proměnné y); i platí také $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$. Odtud odečtením rovnice $y = ax + b$ plyne $\Delta y = a\Delta x$ čili $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$.

Je-li závislost mezi proměnnými veličinami x a y dána rovnicí *lineární* (1. stupně) $mx + ny + p = 0$ (taková funkce sluje nerozvinutá t. j. neupravená na tvar $y = f(x)$), jest obrazem této závislosti vždy přímka; stačíť řešiti danou rovnici dle y, i obdržíme $y = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n}$, což je výraz tvaru $ax + b$. Řešení neplatí pro $n = 0$; v tom případě jest $mx + p = 0$ čili $x = -\frac{p}{m}$, stručněji $x = c$, t. j. pro každý bod této funkce je úsečka táž, i jest $x = c$ zase přímka, a to rovnoběžná s osou Y. (Ve zvl. případě $c = 0$ jest $x = 0$ rovnice osy Y.)

8. Dejme tomu, že těleso vzdálené 3 *cm* od nějakého bodu, který chceme míti na zřeteli, od bodu toho se vzdaluje po přímce jím procházející a vykoná v 1. sekundě dráhu 2 *cm*, v 2. zase 2 *cm*, v 3. opět 2 *cm* atd., v každé násl. vteřině vždy dráhu 2 *cm*; pravíme, že těleso se pohybuje rovnoměrně, a přímka D v obr. 10. jest obrazem tohoto pohybu (jeho průběhu, nikoli dráhy, která může býti zvolena také křivočarou). Úsečka x při tomto zobrazení značí dobu, pořadnice y vzdálenost od onoho vytčeného bodu; $y = 2x + 3$ jest rovnicí pohybu toho. Dráha v jednotce doby (zde 1 sek.) vykonaná sluje *rychlostí* pohybu rovnoměrného; jest to patrně směrnice v rovnici pohybu (zde 2 *cm*), znázorněna jsouc stoupáním přímky pohyb zobrazující. Víme-li, že za jistý počet sekund $x_2 - x_1 = \Delta x$ zvětšila se dráha tělesa o přírůstek $y_2 - y_1 = \Delta y$, jest rychlost pohybu dána poměrem přírůstku dráhy ku přírůstku doby, tedy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, což souhlasí s výrazem pro směrnici přímky jdoucí body (x_1, y_1) a (x_2, y_2). Počítáme-li vzdálenost y od bodu, z něhož

se těleso počalo pohybovati a značíme-li rychlost jeho pohybu c, platí $y = cx$, což je známý vztah $s = ct$, psaný pouze jinými písmeny.

Viděli jsme, že grafické znázornění postupu, kterým se otepluje voda stále stejně zahřívaná jest přímka (obr. 7.); pravíme, že teplota vody zahřívané je jednoduše a přímo úměrna množství přivedeného tepla (době) nebo že voda se otepluje rovnoměrně. Přírůstek teploty v jednotce doby sluje rychlostí oteplování; tato rychlost je dána směrnicí oné přímky a viditelna na jejím stoupání.



Obr. 11. Oteplování ledu, vody, vodních par (100 kalorií ... 1 *cm*, 100° ... 2 *cm*).

Jako v uvedených případech posoudíme rychlost pochodu fys. ze stoupání přímky jej znázorňující, tak můžeme učiniti vždy. Dejme tomu, že zahříváme led, jeho teplota stoupá až k 0°; dále přiváděným teplem se teplota nezvyšuje, led se rozpouští, teprv voda 0° počne zase nabývati vyšších teplot až k 100°; další teplo spotřebuje se opět na proměnu skupenství kapalného v plynné, načež páry 100° se počnou oteplovati. Průběh vyložený znázorněn je na obr. 11., kde x značí počet kalorií, y pak teplotu 1 *kg* ledu, vody, vodních par; přihlíženo tam ovšem nejen k specifickému teplu ledu, resp. vody a par vodních, nýbrž i ke skupenskému teplu tání ledu resp. varu vody. Z obrazu je patrno, že led se otepluje rychleji než voda, páry vodní asi tak rychle jako led. (Pokračování.)

O motorech explosivních.

Napsal Dr. **Ferd. Pietsch.**

Ku přeměně energie tepelné na mechanickou, užívá se od dob Wattových stroje parního. Ačkoli parní stroj byl značně zdokonalen, a ve spotřebě páry se veliké oekonomie docílilo, přece jen i u nejlepších strojů se jen nepatrná část tepla spálením uhlí získaného přemění na práci. To nám objasní tento příklad: U velkých strojů kompoundních, jež pracují s kondensací, je spotřeba na koňskou sílu a hodinu as 8 *kg* páry. To znamená, že musíme pod kotlem za každou koňskou sílu a hodinu spáliti 1 *kg* velmi dobrého uhlí kamenného. Tím vznikne teplo asi 7500 *kal.*

Jelikož mechanický aequivalent tepla jest 428 *kgm*, jest ono teplo rovnocenné $\frac{7500 \cdot 428}{75 \cdot 3600} = 11{,}8\ KS$. Měli bychom dostati 11,8 *KS*, dostáváme však 1 *KS*. Tedy to znamená, že pouze $1 : 11{,}8 = 8{,}4\%$ tepla se zužitkuje. Co je toho příčinou? Část tepla ztrácíme již pod kotlem. I nejlepší kotle zužitkují jen asi 70% tepla; dále vznikají ztráty tepla v potrubích i ve válci samém. Kdybychom však dovedli všechny tyto ztráty zameziti, přece bychom byli daleko od onoho ideálního využitkování tepla. Neboť zde působí nejvíce ta okolnost, že nám pára vodní slouží za sprostředkovatele té proměny. Než však tu páru obdržíme, musíme velké množství vypařovacího tepla vodě dodati, jež zůstává nezužitkováno, jsouc teplem latentním. Teplo srážením páry výfukové povstalé můžeme jen nepatrně zužitkovati zahřívajíce vodu k napájení.

Vidíme tedy, že by daleko lépe tepla zužitkoval takový stroj, který by palivo spálil ve válci samém. To právě děje se u strojů, jimž věnován tento článek, u motorů výbušných.
