František Vyčichlo
Konstrukce meridiánu šroubové plochy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 6, 147--151

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123464`

Konstrukce meridiánu šroubové plochy.

F. Vyčichlo.

(Došlo 17. prosince 1933.)

1. Pro šroubovou plochu **P** buď dána osa O, normální křivka N v rovině $\nu \perp O$ (t. zn., že je známo konstruktivní vytvoření křivky N, konstrukce jejích tečen a evoluty) a parametr určující šroubový pohyb i co do smyslu.

Vytkněme na křivce N libovolný nesingulární bod a a označme n střed křivosti křivky N pro bod a. Rovina $\mu \equiv (a, O)$ protne šroubovou plochu v meridiánu M. Naší úlohou je sestrojení tečny a středu křivosti křivky M pro bod a, je-li znám bod n. (Resp. obráceně.)

Zvolme si roviny ν a μ za prvou resp. druhou průmětnu ortogonálního promítání, potom $(\nu \times \mu) \equiv X$ prochází bodem a. (Viz obr.)

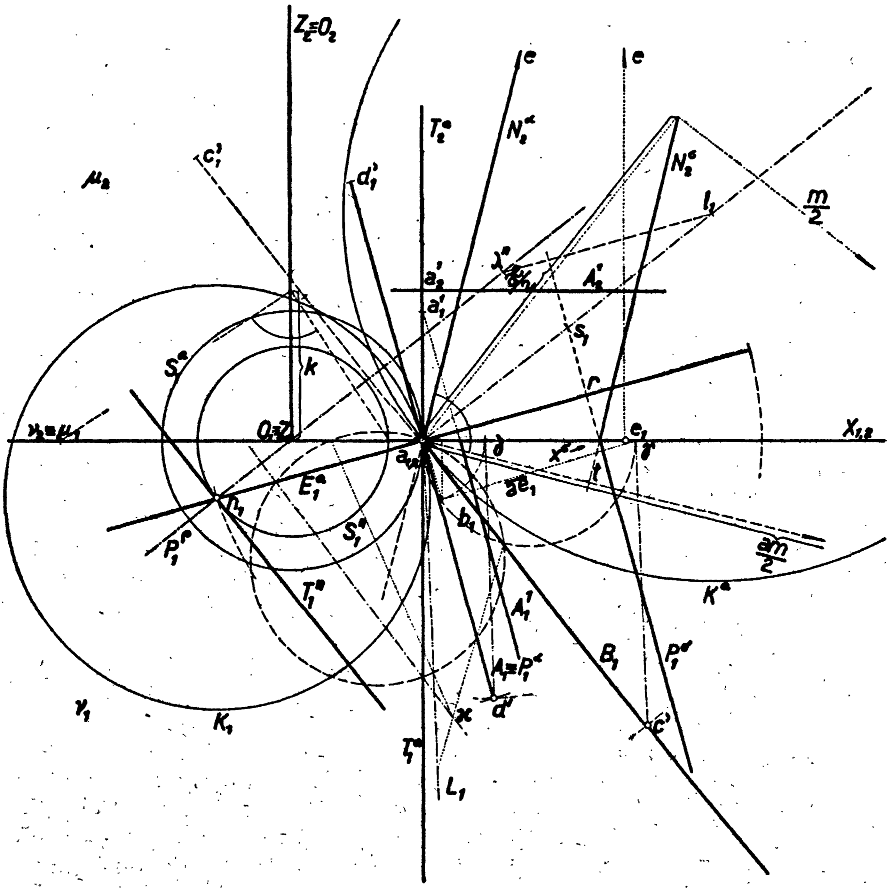
Křivku N nahraďme pro naši úlohu kružnicí křivosti K, jejíž střed je bod n, a plochu **P** plochou **P***, jež vzniká příslušným šroubovým pohybem křivky K.

Společná tečná rovina α těchto ploch v bodě a je určena tečnou A kružnice K v bodě a a tečnou T^a šroubovice S^a, která leží na obou plochách a je vytvořena příslušným šroubovým pohybem bodu a. Při tom je $P^a \equiv A$; $T_{1,2}{}^a \perp X_{1,2}$ a jde bodem $a_{1,2}$.

Abychom určili T^a, nanesme na $T_1{}^a$ úsečku $aa_1{}^1 = aO_1$ a na $T_2{}^a$ (v příslušném smyslu) úsečku $aa_2{}^1$ rovnou parametru šroubového pohybu. Pak $aa^1 \equiv T^a$. Pro rovinu α potom: $\alpha \equiv (P^a, a^1)$. Přímka $N^a = (\mu \times \alpha)$ je patrně tečnou meridiánu M v bodě a.

Spádová přímka E^a (vzhledem k rovině ν) roviny α, procházející bodem a, vytvořuje při našem šroubovém pohybu rozvinutelnou šroubovou plochu, jež se dotýká ploch **P**, **P*** podél S^a; proto jsou E^a a T^a jedním párem jejich sdružených tečen v bodě a. Válec, který se dotýká plochy **P*** podél K, dotýká se v bodě a také plochy **P**; jeho povrchové přímky jsou rovnoběžné k tečně T^n sestrojené v bodě n k šroubovici S^n, již při našem pohybu tento bod opíše. Je tedy přímka A s přímkou B, vedenou bodem a rovnoběžně k T^n, druhým společným párem sdružených tečen v bodě a ploch **P** a **P***. Obě plochy mají tedy v bodě a společnou involuci sdružených tečen a rovina ν je protíná v křivkách, které se v bodě a oskulují (mají tam trojbodový styk). Jsou tedy jejich indikatrix pro bod a totožny a obě plochy se v bodě a oskulují, t. j. libovolná rovina jdoucí a (a různá od roviny tečné) seče obě plochy v křivkách, které mají v bodě a styk nejméně trojbodový.

Pro přímku B platí: $B_1 \perp nO_1$ a je-li b_1 průsečík B_1 s hlavní přímkou $A_1^1 \parallel A_1$ roviny α, která prochází a^1, je $ab_1 = nO_1$.



Nahraďme dále šroubovici S^n její oskulační kružnicí K^n v bodě n. Její rovinu označme ϱ. Posouváme-li kružnici K tak, aby její střed n probíhal kružnici K^n a její rovina byla stále rovnoběžná k rovině ν, vytvoříme translační plochu $\mathbf{P}^{**}$.

Snadno nahlédneme, že pro řešení naší úlohy je možno nahraditi v okolí bodu a plochu $\mathbf{P}^*$ plochou $\mathbf{P}^{**}$.

Posuneme-li křivku K^n ve směru na, až bod n splyne s a, přejde do polohy $\overline{K}^n$, která patrně leží na ploše $\mathbf{P}^{**}$. Je-li l střed této kružnice $\overline{K}^n$ a λ^n střed kružnice K^n, je $na = \lambda^n l$.

Konečně mysleme si kružnice K a $\overline{K}^n$ nahrazeny parabolami Π a $\overline{\Pi}$, jež je v bodě a oskulují a mají v průmětu do ν přímku al za společný průměr. Translační plocha stanovená parabolami bude paraboloidem $\mathbf{P}^2$, který plochu $\mathbf{P}$ v bodě a oskuluje, jak opět snadno lze ukázati. Za účelem konstrukce naší úlohy můžeme tedy plochu $\mathbf{P}$ nahraditi paraboloidem $\mathbf{P}^2$. Rovina μ protíná jej v kuželosečce, jejíž střed křivosti pro bod a je hledaným bodem m. Abychom jej mohli snadno sestrojiti, transformujeme afinně paraboloid, aby zůstal oskulačním v bodě a a rovina μ protínala jej v parabole, která příp. v bodě a má vrchol.

Libovolná rovina σ rovnoběžná k rovině α vytne z parabol Π a $\overline{\Pi}$ dvě tětivy, jež jsou sdruženými průměry kuželosečky R, v níž σ seče paraboloid $\mathbf{P}^2$; její střed je průsečík $(\sigma \times al) \equiv s$. Označme dále x^σ průsečík σ s osou X.

Sestrojme konečně k paraboloidu $\mathbf{P}^2$ paraboloid $\mathbf{P}_0^2$ afinně položený, pro rovinu α jakožto samodružnou rovinu afinity a v níž bodu s přísluší $s_0 \equiv x^\sigma$. Potom je i tento paraboloid oskulačním k ploše $\mathbf{P}$ v bodě a, jak je přímo patrno, a rovina σ jej protíná v kuželosečce R_0, která vznikne z R posunutím určeným $\overline{ss_0}$.

Tětiva křivky $\overline{\Pi}$ obsažená v rovině σ promítá se do ν v tětivu paraboly $\overline{\Pi}_1$, která má al_1 za osu, a za vrchol a kružnici K^a (středu l_1) za kružnici křivosti ve vrcholu. Prvý průmět této tětivy je kolmý k al_1 a její poloviční délka je rovna $\sqrt{2\,\overline{al_1}\,.\,\overline{as_1}}$; je tedy reálná, když l a s leží na téže straně bodu a, imaginární, když tyto body jsou na přímce al rozděleny bodem a.

Přenesme rovnoběžně tuto polotětivu do ac'. Tedy:

$$\overline{ac'} = \sqrt{2\,\overline{al_1}\,.\,\overline{as_1}}, \quad ac' \perp al_1.$$

(V obrazci zvolili jsme l_1 souměrně k a vzhledem k s_1, proto $\overline{ac'} = \overline{al_1}$.)

Tětiva křivky Π v rovině σ leží na P^σ a je rovna tětivě paraboly, v níž seče plochu P_0^2 rovina ν. Seče-li tedy $\overline{an}$ přímku P^σ v bodě r, platí pro délku d tětivy:

$$\tfrac{1}{2}d = \sqrt{2\,\overline{an}\,.\,\overline{ar}}.$$

Přeneseme-li tuto úsečku $\frac{1}{2}d$ buď reálnou nebo imaginární od a na kolmici k an do ad', obdržíme dva sdružené poloměry ac', ad' kuželosečky $R_1{}^a$, která posunutím daným úsečkou $\overline{ax^\sigma}$ přechází v první průmět $R_{0,1}$ křivky R_0.

Rovina μ seče potom plochu $\mathbf{P}_0^2$ v parabole Λ_0, jejíž střed křivosti příslušný bodu a je hledaným bodem m. Tětivu této paraboly rozpůlenou bodem x^σ obdržíme jakožto průměr křivky $R_{0,1}$. Je-li tudíž $\overline{ae_1}$ poloměr kuželosečky R_1^a položený na X, jest e_1 průmětem bodu e položeným na N^a a úsečka $\overline{ae}$ udává směr a poloviční délku uvedené tětivy.

Bod m leží na kolmici k N^a v bodě a a značí-li t průsečík této kolmice a N^σ, jest:

$$\overline{am} = \frac{\overline{ae}^2}{2\,\overline{at}},$$

poněvadž parabola Λ_0 a afinně k ní položená parabola, pro N^a jako osu afinity a v níž bodu x^σ přísluší bod t, mají v bodě a stejnou křivost.

Abychom tedy sestrojili bod m z daného bodu n, sestrojíme $\overline{ac'}$, $\overline{ad'}$, dále v involuci ve svazku, jehož vrchol je a a v níž (A_1, ab_1), (T_1^a, an_1) jsou dvě dvojice odpovídajících si paprsků, sestrojíme přímku L_1, které s X tvoří další pár involuce; body c', d' vedeme rovnoběžky k L_1, která X protnou v bodech γ a δ. Potom $\overline{ae_1}^2 = \overline{a\gamma}^2 + \overline{a\delta}^2$. Je-li jeden z poloměrů křivky R_1^a imag., buďto na ac' nebo na ad' repres. reálnou úsečkou ac' resp. ad', potom je $\overline{ae_1}^2 = -\overline{a\gamma}^2 + \overline{a\delta}^2$ resp. $\overline{ae_1}^2 = \overline{a\gamma}^2 - \overline{a\delta}^2$.

Tím je též délka $\overline{ae}$ stanovena. Je-li $\overline{ae}^2$ kladné, plyne z výrazu:

$$\overline{am} = \frac{\overline{ae}^2}{2\,\overline{at}},$$

že body m a t nejsou rozděleny bodem a; je-li $\overline{ae}^2$ záporné, pak body t a m jsou rozděleny bodem a.

2. Máme-li obráceně sestrojiti bod n, když je dán bod m, sestrojíme nejprve délku $\overline{ae}$ a tedy poloměr $\overline{ae_1}$ křivky R_1^a, jakož i poloměr $\overline{ac'}$, k němuž známe pro poloměr sdružený v R_1^a sice polohu, ale nikoliv délku. Poněvadž konstrukce přímky L_1 nedozná tu žádné změny, lze také bod γ sestrojiti jako prve a z relací dříve uvedených vyplývá konstrukce bodu δ, ať již jsou délky na X nebo na $\overline{ac'}$ reálné nebo imaginární. Rovnoběžka bodem δ k L_1 stanoví na A bod d', takže konečně obdržíme bod n z relace:

$$\overline{an} = \frac{\overline{ad'}^2}{2\,\overline{ar}},$$

při čemž n, r leží opět na téže straně, nebo na různých stranách bodu a, podle toho, je-li délka průměru $\overline{ad'}$ reálná nebo imaginární.

3. Konstrukce se zjednoduší, když tečná rovina α plochy $\mathbf{P}$ je kolmá k rovině μ, nebo když prochází osou X.

V prvém případě je tečna A kolmá k ose X. Zavedeme rovinu α

za pomocnou průmětnu a sklopíme ji do roviny ν. (Na př. $a_3{}^1$ má od A, v přísl. smyslu, vzdálenost rovnou parametru šroubového pohybu.)

Plocha $\mathbf{P}^2$ splývá s $\mathbf{P}_0{}^2$. Páry sdružených tečen jsou: I. (aa^1; rovnoběžka vedená bodem a k přímce O), II. (A, $B \parallel T^n$).

V uvedeném sklopení je prvý pár vyjádřen přímkami ($aa_3{}^1$, $X_{1,2}$), druhý přímkami (A, $ab_3{}^1$), kde $b_3{}^1$ je průsečík přímky $A_3{}^1 \parallel A$ a jdoucí $a_3{}^1$ a přímky B_3, vedené a rovnoběžně k přísl. průmětu tečny šroubovice S^n v bodě n.

Paraboly Π a $\overline{\Pi}$ promítají se do ν v paraboly o společné ose X a o společném vrcholu a; první má bod n, druhá bod l, pro který $\overline{al} = \overline{n\lambda^n}$ za střed oskulační kružnice pro vrchol, takže snadno můžeme sestrojiti úsečky $\overline{ac'}$, $\overline{ad'}$. Z c', d' odvodíme snadno sdružené poloměry pro křivku R_0. Sestrojíme-li nyní jako prve délku poloměru křivky R_{03} ležícího na X, bude opět:

$$\overline{am} = \frac{\overline{ae_3}^2}{2\,\overline{aa^1}}.$$

Konstrukce bodu n, dán-li bod m, je patrná.

V druhém případě splývá A s osou X, která se obou křivek M, N v bodě a dotýká. Normála U plochy $\mathbf{P}$ v bodě a je kolmá k ose X. Vedeme-li bodem n rovnoběžku k ose O, protne tato U v bodě, jehož průmět do μ je hledaným bodem m, jak vyplývá jednoduše z věty Mesnierovy. Obdobným postupem obdržíme tu bod n z daného bodu m.

*

Une construction de la section méridienne d'un hélicoïde général.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans les problèmes constructifs des hélicoïdes (supposé un mode d'éclairage), on détermine le méridien de la surface en supposant que la courbe normale soit donnée, ou inversement. Au cours de cette construction, on trace les points et les tangentes du méridien de la manière bien connue.

Dans l'article précédent l'auteur construit les centres de courbure du méridien en des points particuliers. Il fait cela en supposant que le centre de courbure de la courbe normale au point respectif soit donné. Les constructions résultantes sont quadratiques et sont effectuées à l'aide d'une surface du 2^e ordre qui a les propriétés suivantes:

a) la surface donnée et la surface du 2e ordre ont le même plan tangent au point considéré;

b) un plan arbitraire qui passe par le point donné (et qui ne coïncide pas avec le plan tangent) coupe les deux surfaces suivant deux courbes qui ont, au point considéré, un contact du 2e ordre au moins.