Emil Weyr
O trojúhelnících kruhových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 24--29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123425

$$\begin{vmatrix} a\ , b\ , c \\ a'\ , b'\ , c' \\ a''\ , b''\ , c'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

nebo $a b' c'' + b c' a'' + c a' b'' = a' b c'' + b' c a'' + c' a b''$, (19)
kteráž podmínka slove *pásmová rovnice*, pomocí níž se dá z polohy známých ploch ustanoviti poloha ploch neznámých.

(Pokračování.)

O trojúhelnících kruhových.

(Podává dr. *Em. Weyr.*)

1. Promítneme-li povrch koule z bodu povrchového O na rovinu R, která se koule dotýká v bodě O' bodu O protilehlém (tak že $\overline{OO'}$ jest průměr koule), obdržíme jak známo „*stereografické zobrazení*“ koule na rovinu R. Stereografická projekce uvádí rovinu R a kouli v následující souvislosť: „Každému bodu P na povrchu koule se nalézajícímu (obr. 13.) přísluší bod P' co projekce, který lze obdržet co bod průsečný roviny R a paprsku $\overline{OP}$.

Dva body protilehlé na povrchu koule ku př. P a Q přísluší bodům P' Q' roviny R, jejichž spojující přímka prochází bodem O', při čemž zároveň stává rovnice

$$\overline{O'P'}.\overline{O'Q'} = P^2,$$

je-li P průměr v úvahu vzaté koule.

Veškeré kruhy na povrchu koule se nalézající promítají se opět co kruhy. Hlavní kruh HH, jehož rovina rovnoběžná jest k rovině R, promítá se co kruh $H'H'$, jehož střed jest bod O' a jehož poloměr rovná se průměru P koule. Veškeré ostatní hlavní kruhy koule promítají se v kruzích, které protínají kruh $H'H'$ v bodech omezujících průměry tohoto kruhu, a každé dva z těchto kruhů protínají se opět v bodech, jež jsou obrazy protilehlých bodův základní koule.

Hodnoty úhlové se při projekci stereografické nemění, t. j. úhel, který vytvořen jest dvěma libovolnými kruhy na povrchu koule, rovná se úhlu vytvořenému příslušnými obrazy v rovině R.

2. Na základě všeobecně známých, právě blíže vytknutých vlastností stereografické projekce možná dokázat, že

„libovolné tři kruhy v rovině považovány býti mohou za stereografické obrazy tří hlavních kruhův koule.“

Buďtež K_1 K_2 K_3 tři libovolně v rovině rozpoložené se vzájemně protínající kruhy (obr. 14.). Sestrojíme-li si společné tři tetivy těchto kruhů, pak se tyto jak známo protínají v témže bodě O'. Bodem O' v každém z tří kruhů prochází jediná nejmenší tetiva dotýčného kruhu a délky všech tří takto obdržených tetiv jsou sobě rovné a zároveň tyto tři tetivy rozpůleny jsou bodem O'. Sestrojíme-li tudíž kruh $H'H'$, jehož průměr rovná se společné délce oněch tří nejmenších tetiv a jehož střed jest bod O', pak kruh tento protnut bude každým z daných tří kruhů K_1 K_2 K_3 v bodech omezujících průměry kruhu $H'H'$. Nyní sobě představme kouli, která se dotýká v bodě O' roviny R daných tří kruhů, jejíž průměr nechť se rovná poloměru kruhu HH'. Promítneme-li kruhy K_1, K_2, K_3 z bodu O koule této, který jest protilehlý bodu O', na povrch koule, tu obdržíme dle toho, co o stereografickém promítání řečeno bylo, na povrchu koule tři hlavní kruhy a můžeme tudíž skutečně libovolné tři kruhy v rovině považovati za stereografické průměty tří úplně určitých hlavních kruhů a taktéž i úplně určité koule. Koule ta jest pak realná, protínají-li se veškeré tři dané kruhy K_1 K_2 K_3 v reálných bodech. V každém jiném případu (kde na př. dva z daných kruhů aneb nižádné dva nemají reálných bodův společných) stává se koule výše uvedená pomyslnou.

3. Buďtež nyní v obr. 14. A_1 A_1' průseky kruhů K_2 K_3, A_2 A_2' průseky kruhů K_1 K_3 a konečně A_3 A_3' průseky kruhů K_1 K_2. Pak tvoří oblouky *arc* A_1 A_2, *arc* A_2 A_3, *arc* A_3 A_1 trojúhelník, jehož strany jsou části tří kruhů a jejž nazývati budeme *„trojúhelníkem kruhovým“*. Vrchole vytknutého trojúhelníku jsou body A_1 A_2 A_3 a tečny kruhů v těchto bodech svírají úhly, jež považovati budeme za úhly trojúhelníku kruhového. Strany pak jsou výše již vytknuté oblouky. Průseky A_1' A_2' A_3' tří upotřebených kruhů, které se mimo body A_1 A_2 A_3 vyskytují, nazveme těmto vrcholům *„sdružené body“*.

Každým vrcholem kruhového trojúhelníku a příslušným sdruženým bodem prochází nekonečné množství kruhů tvořících

„svazek kruhový". Kruhy takového svazku nazveme *„kruhy příčnými"* (transversálnými).

O čtyřech kruzích téhož svazku, jejichž tečny v jednom (a pak i v druhém) z průsečných bodů tvoří svazek paprsků harmonických, pravíme, že tvoří svazek kruhů harmonických aneb že jsou harmonické. Co zvláštní případ kruhů harmonických podotkneme čtyry kruhy, z nichž dva rozpolují úhly povstávající průsekem druhých dvou kruhů.

4. Ku každému kruhovému trojúhelníku přísluší jistý kruh $H'H'$, pro kterýž jemu a kruhům K_1 K_2 K_3 společné tetivy jsou průměry. Střed O' tohoto kruhu jest průsečný bod přímek $\overline{A_1 A_1'}$, $\overline{A_2 A_2'}$, $\overline{A_3 A_3'}$ a průměr jeho jest společná délka v kruzích K_1 K_2 K_3 bodem O' procházejících nejmenších tetiv.

Poněvadž, jak známo, můžeme trojúhelník kruhový určující tři kruhy považovat za stereografické projekce tří hlavních kruhův, při čemž kruh $H'H'$ jest obrazem hlavního kruhu koule, jehož rovina rovnoběžná jest k rovině obrazné (kterouž koule v bodu O' dotýká), tuť patrno, že nejen veškeré kruhy příčné za obrazy hlavních kruhů koule považovati můžeme, alebrž vůbec veškeré kruhy, které kruh $H'H'$ v diametrálně protilehlých bodech protínají. Dále bezprostředně vysvitá, že každé dvé takovýchto kruhů se protíná ve dvou bodech, jimiž proložené kruhy jsou obrazy hlavních kruhův koule.

Je-li pak QQ' pár průsečných bodův takovýchto kruhů (které jsou totiž obrazy hlavních kruhů koule), tu přímka $\overline{QQ'}$, procházeti musí bodem O' a zároveň stává rovnice

$$\overline{O'Q} \, . \, \overline{O'Q'} = P^2$$

jest-li P poloměrem kruhu $H'H'$, který bychom *„hlavním kruhem"* nazvati mohli.

5. Ze souvislosti, v kteréž se dle stereografické projekce povrch koule a rovina R nalézá, lze souditi, že každé poučce týkající se útvarů na povrchu koule odpovídati bude obdobná poučka pro rovinu R. Každému pak theorému, jednajícímu o hlavních kruzích koule, odpovídati bude věta, jednající o kruzích, jenž protínají pevný kruh HH' v diametrálně protilehlých bodech. Každé poučce o trojúhelníku sferickém odpovídati bude obdobná poučka o trojúhelníku kruhovém v rovině R. Jelikož můžeme každé tři kruhy roviny R považovati za stereografické

projekce hlavních kruhů jisté koule, tuť patrno, že každý kruhový trojúhelník můžeme pojímati co stereografickou projekci jistého trojúhelníku sferického. Poněvadž jak známo stereografickou projekcí hodnoty úhlové zůstanou nezměněny a tedy i taktéž dvojpoměr čtvero kruhů hlavních projekcí touto se nemění, tuť čtenář snadno pochopí, že každé po levé straně se nalézající větě, již co známou předpokládáme a která se týká trojúhelníku sferického, odpovídá příslušná po pravé straně se nalézající, trojúhelníku kruhového se týkající věta. Hlavní kruh trojúhelníku kruhového označujeme, jako se již stalo $H'H'$.

6. „*Hlavní kruhy koule rozpolující vnitřní úhly sferického trojúhelníku procházejí týmž bodem.*“

„*Dva hlavní kruhy koule rozpolující vnější dva úhly sferického trojúhelníku a hlavní kruh rozpolující třetí vnitřní úhel procházejí týmž bodem.*“

„*Příčné kruhy rozpolující vnitřní úhly kruhového trojúhelníku procházejí týmž bodem.*“

„*Dva příčné kruhy rozpolující vnější dva úhly kruhového trojúhelníku a příčný kruh rozpolující třetí vnitřní úhel procházejí týmž bodem.*“

Poněvadž každé tři hlavní kruhy koule, procházející týmž bodem zároveň, současně procházejí bodem diametrálně protilehlým, tuť jasno, že i ve větách po pravé straně stojících obdržíme vždy tři kruhy, které současně procházejí dvěma body QQ', které souvisí rovnicí

$$\overline{O'Q}\,.\,\overline{O'Q'} = P^2$$

při čemž přímka QQ' prochází středem O' hlavního kruhu dotyčného kruhového trojúhelníku.

Sestrojíme-li veškeré hlavní kruhy koule rozpolující jak vnitřní tak i vnější úhly sferického trojúhelníku, tu patrně obdržíme šest takovýchto kruhů; a kruhy ty mají pak na kouli takové rozpoložení, že prochází čtyrykráte po třech dvěma protilehlými body. Pro náš trojúhelník kruhový můžeme tudíž vyslovit následující všeobecnou poučku.

„*Sestrojíme-li v trojúhelníku kruhovém oněch šest kruhů příčných, které rozpolují vnitřní a vnější úhly, budou se kruhy ty čtyrykráte po třech protínati v týchž dvou bodech. Takto obdržíme čtyry páry průsečných bodů. Je-li QQ' jeden z těchto* *párů, pak přímka* $\overline{QQ'}$ *prochází středem* O' *kruhu hlavního* $H'H'$ *a současně platí rovnice* $\overline{O'Q}\,.\,\overline{O'Q'} = P^2$*"*.

7. *„Hlavní kruhy koule proložené vrcholy sferického trojúhelníku a kolmo stojící na protilehlých stranách protínají se v témže bodě."*

„Příčné kruhy trojúhelníku kruhového, které kolmě protínají strany protilehlé vrcholům jimiž procházejí, protínají se v týchž dvou bodech".

Rozumí se samo sebou, že hlavní kruhy koule procházející týmž bodem současně procházejí i bodem onomu diametrálně protilehlým.

8. *„Hlavní kruhy koule rozpolující vnější úhly sferického trojúhelníku protínají protilehlé strany v bodech nacházejících se na témže kruhu hlavním".*

„Příčné kruhy trojúhelníku kruhového, jenž rozpolují vnější úhly, protínají protilehlé strany v bodech, kteréž se nacházejí na témže kruhu protínajícím hlavní kruh $H'H'$ *v bodech diametrálně protilehlých".*

„Dva hlavní kruhy koule rozpolující dva vnitřní a hlavní kruh rozpolující třetí úhel vnější ve sferickém trojúhelníku protínají protilehlé strany v bodech na témže hlavním kruhu se nalezajících".

„Dva příčné kruhy rozpolující dva vnitřní a příčný kruh rozpolující třetí vnější úhel v kruhovém trojúhelníku protínají protilehlé strany v bodech nacházejících se na témže kruhu, který hlavní kruh $H'H'$ *v bodech diametrálně protilehlých protíná."*

9. Máme-li na povrchu koule dva body a, b, které nám určují jimi procházející hlavní kruh a tedy i jimi omezený oblouk $arc\ \overline{ab}$ a chceme-li sestrojiti bod r rozpolující tento oblouk, tu dostačí abychom sestrojili tečny oblouku v bodech a, b, které se nám v jistém bodě p — v pólu (ve smyslu geometrie rovinné a ne sférické) oblouku $arc\ \overline{ab}$ — protínají a spojíme-li nyní bod p se středobodem koule tu nám přímka, již takto obdržíme, protne oblouk $arc\ \overline{ab}$ v bodě r. Určíme-li stereografickou projekcí na rovinu R, pak se tečny hlavního kruhu promítnou co tečny příslušného kruhového obrazu a obraz bodu p bude tudíž pól jistého oblouku v rovině R. Přímka

pak, spojující středobod koule s pólem p, znázorní se nám co přímka procházející bodem O', v kterémž rovina R koule se dotýká.

Považujeme-li tudíž kruhový trojúhelník $A_1\ A_2\ A_3$ za stereografický obraz sferického trojúhelníku, tu obdržíme body, které jsou obrazy bodů rozpolujících strany sferického trojúhelníku, promítneme-li póly oblouků $A_1\ A_2$, $A_2\ A_3$, $A_3\ A_1$ (t. j. póly stran kruhového trojúhelníku) ze středu O' hlavního kruhu $H'H'$ na tytéž strany. Pro trojúhelník sferický platí jak známo následující po levé straně se nacházející poučka, z čehož dle předešlého plyne správnost i po pravé straně se nalézajícího theoremu;

„*Hlavní kruhy koule, procházející vrcholy a středy protilehlých stran sferického trojúhelníku, protínají se v témže bodu*“.

„*Promítneme-li póly stran trojúhelníku kruhového na tytéž strany ze středu O' hlavního kruhu $H'H'$ a proložíme-li obdrženými body a protilehlými vrcholy příčné kruhy, protínají se kruhy tyto v témže bodu.*“