Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D328--D329

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123393

ÚLOHY.

Dokažte, že řada

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{1^3} + \frac{\varphi(2x)}{2^3} + \ldots + \frac{\varphi(kx)}{k^3} + \ldots, \qquad (1)$$

kde $\varphi(x)$ jest funkce definovaná vztahy

$$\varphi(x) = x, \text{ je-li } 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \ \varphi(x + 2) = \varphi(x) \quad \text{pro každé (reálné) } x,$$

jest funkce spojitá, která nemá derivaci v žádném bodě $x = p/q$ (p, q celá čísla, $q > 0$). V každém jiném bodě pak funkce daná derivaci má. V bodech $x = p/q$ má však derivaci zleva i zprava. (Časopis **60** (1931), str. 263, úloha 7.) *Petr.*

Řešení. (Zaslal p. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř.)

Spojitost funkce $\Phi(x)$ je patrna ze stejnoměrné konvergence řady (1).

Budiž x libovolné reálné číslo; pro každé celé $k > 0$ označme znakem $a_k = a_k(x)$ celé číslo takové, že $a_k \leqq kx < a_k + 1$, a znakem $b_k = b_k(x)$ celé číslo takové, že $b_k < kx \leqq b_k + 1$. Z definice funkce $\varphi(x)$ plyne: 1. vždy je $|\varphi(kx + kh) - \varphi(kx)| \leqq |kh|$; 2. je-li kladné h tak malé, že $kx + kh < a_k + 1$, je $\varphi(kx + kh) - \varphi(kx) = (-1)^{a_k} kh$; 3. je-li záporné h tak malé v absolutní hodnotě, že $kx + kh > b_k$, je $\varphi(kx + kh) - \varphi(kx) = (-1)^{b_k} kh$.

Pro kladné h označme znakem $k_0 = k_0(h)$ největší celé číslo takové, že pro všechna celá kladná $k < k_0$ je $kx + kh < a_k + 1$. Potom je

$$\frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} = \sum_{0<k<k_0} \frac{(-1)^{a_k}}{k^2} + r(h),$$

kde

$$|r(h)| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| \frac{\varphi(kx + kh) - \varphi(kx)}{k^3 h} \right| \leqq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ježto pro $h \to 0$ je $k_0 \to \infty$ a tedy $r(h) \to 0$, existuje v bodě x derivace zprava

$$\Phi'_+(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{a_k} k^{-2}$$

a obdobně se dokáže existence derivace zleva

$$\Phi'_-(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{b_k} k^{-2}.$$

Budiž předně x iracionální; potom je $a_k = b_k$ a tedy existuje derivace $\Phi'(x)$.

Budiž za druhé $x = p/q$ (p, q celá, nesoudělná, $q > 0$); tvrdím, že potom $\Phi'(x)$ neexistuje, t. j. že $\Phi'_+(x) \neq \Phi'_-(x)$. V tomto případě je vskutku pro $k = mq$ ($m = 1, 2, \ldots$)

$$a_k = mp, \; b_k = a_k - 1;$$

pro ostatní k je $a_k = b_k$. Tedy je

$$\Phi'_+(x) - \Phi'_-(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{mp} m^{-2} q^{-2}.$$

Pro p sudé je tento výraz kladný; pro p liché je záporný (jde totiž o řadu alternující, viz Petr, Počet diferenciální, str. 65—66). Tedy je vskutku $\Phi'_+(x) \neq \Phi'_-(x)$.