

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

## Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D328--D329

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123393>

### Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1937

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## ÚLOHY.

Dokažte, že řada

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{1^3} + \frac{\varphi(2x)}{2^3} + \dots + \frac{\varphi(kx)}{k^3} + \dots, \quad (1)$$

kde  $\varphi(x)$  jest funkce definovaná vztahy

$$\varphi(x) = x, \text{ je-li } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi(x+2) = \varphi(x) \quad \text{pro každé (reálné) } x,$$

jest funkce spojitá, která nemá derivaci v žádném bodě  $x = p/q$  ( $p, q$  celá čísla,  $q > 0$ ). V každém jiném bodě pak funkce daná derivaci má. V bodech  $x = p/q$  má však derivaci zleva i zprava. (Časopis 60 (1931), str. 263, úloha 7.) Petr.

Řešení. (Zaslal p. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř.)

Spojitosť funkce  $\Phi(x)$  je patrna ze stejnoměrné konvergence řady (1).

Budiž  $x$  libovolné reálné číslo; pro každé celé  $k > 0$  označme znakem  $a_k = a_k(x)$  celé číslo takové, že  $a_k \leq kx < a_k + 1$ , a znakem  $b_k = b_k(x)$  celé číslo takové, že  $b_k < kx \leq b_k + 1$ . Z definice funkce  $\varphi(x)$  plyne: 1. vždy je  $|\varphi(kx + kh) - \varphi(kx)| \leq |kh|$ ; 2. je-li kladné  $h$  tak malé, že  $kx + kh < a_k + 1$ , je  $\varphi(kx + kh) - \varphi(kx) = (-1)^{a_k} kh$ ; 3. je-li záporné  $h$  tak malé v absolutní hodnotě, že  $kx + kh > b_k$ , je  $\varphi(kx + kh) - \varphi(kx) = (-1)^{b_k} kh$ .

Pro kladné  $h$  označme znakem  $k_0 = k_0(h)$  největší celé číslo takové, že pro všechna celá kladná  $k < k_0$  je  $kx + kh < a_k + 1$ . Potom je

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \sum_{0 < k < k_0} \frac{(-1)^{a_k}}{k^2} + r(h),$$

kde

$$|r(h)| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| \frac{\varphi(kx+kh) - \varphi(kx)}{k^2 h} \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ježto pro  $h \rightarrow 0$  je  $k_0 \rightarrow \infty$  a tedy  $r(h) \rightarrow 0$ , existuje v bodě  $x$  derivace zprava

$$\Phi'_+(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{a_k} k^{-2}$$

a obdobně se dokáže existence derivace zleva

$$\Phi'_{-}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{b_k} k^{-2}.$$

Budiž předně  $x$  iracionální; potom je  $a_k = b_k$  a tedy existuje derivace  $\Phi'(x)$ .

Budiž za druhé  $x = p/q$  ( $p, q$  celá, nesoudělná,  $q > 0$ ); tvrdím, že potom  $\Phi'(x)$  neexistuje, t. j. že  $\Phi'_{+}(x) \neq \Phi'_{-}(x)$ . V tomto případě je vskutku pro  $k = mq$  ( $m = 1, 2, \dots$ )

$$a_k = mp, \quad b_k = a_k - 1;$$

pro ostatní  $k$  je  $a_k = b_k$ . Tedy je

$$\Phi'_{+}(x) - \Phi'_{-}(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{mp} m^{-2} q^{-2}.$$

Pro  $p$  sudé je tento výraz kladný; pro  $p$  liché je záporný (jde totiž o řadu alternující, viz Petr, Počet diferenciální, str. 65—66). Tedy je vskutku  $\Phi'_{+}(x) \neq \Phi'_{-}(x)$ .