Antonín Sucharda

O některých výtvarných zákonech a tečnách závitnice Pascalovy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 260--273

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123347`

O některých výtvarných zákonech a tečnách závitnice Pascalovy.

Žákům středních škol napsal

Ant. Sucharda,

professor c. k. české vyšší realky v Praze.

V následujících řádcích uvedu především nový způsob odvození *závitnice Pascalovy**) (Limaçon de Pascal), pak některé jiné, skoro veskrze na pohybu založené, známé výtvarné zákony této křivky. Potom různé konstrukce tečny z různých těch výtvarných zákonů plynoucí ukáži a srovnám; souhlasem jejich bude dokázáno, že i v mathematice „cesty mohou býti rozličné."

Ku novému způsobu odvození Pascalovy závitnice přivedly mne výklady prof. F. Tilšera, jimiž ve své kinetice ukazuje, kterak se zobrazují sferické křivky opsané částicemi, na něž v prostoru dvě různé síly působí.

Vyložením toho způsobu dán též bude nový, byť skrovný doklad známé pravdy, že vědomé, zákonité zobrazování určitých pomyslů *prostoru* často k výsledkům *rovinné* geometrie přivádí.

Mějme na zřeteli kruhovou hranu K poloměru $2r$, jež otáčí se kol svého průměru O, normalného ku průmětně první, její střed s obsahující, s rychlostí stálou, a částici p v této hraně, pohybující se s rychlostí tolikéž stálou, rovnou třetině úhlové rychlosti hrany K.

Vyšetřme orthogonalný průmět dráhy částice p v první průmětnu.

Průmět průměru O, jediný to bod, označme O^I (viz obr. 1.**),

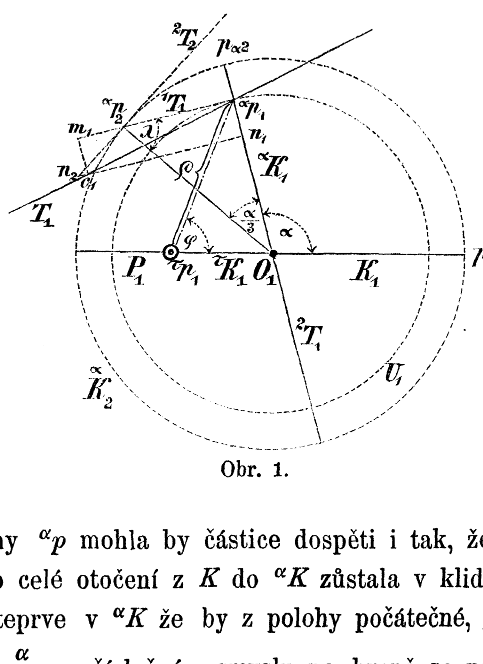
*) Blaise Pascal (1623—1662), po němž křivka ta má jméno, byl slavný mathematik a filosof francouzský. Jsa jinoch jedva 16letý napsal pozoruhodné pojednání o kuželosečkách. Synthetickou methodou zkoumal zákony křivek i objevil zejména různé vlastnosti cykloid, k nimž i křivka, o níž tuto jednáme, náleží. Položil základy počtu pravděpodobnosti. Od něho pochází též z nauky o mocninách dvojčlenů známý „trojúhelník Pascalův", v nové geometrii proslulá „věta Pascalova", důmyslný stroj počítací, dále řada výzkumů fysikálních, tak ku př. užívání tlakoměru ku měření výšek, mimo to pak různé hlubokomyslné práce filosofické.

**) Označení obrazů rozlišeno po způsobu Tilšerově od označení průmětů tím, že na místě římských číslic *nahoře* připojeny *dole* arabské.

průmět hybné hrany ($2r$ dlouhý) v počátečné poloze K^I, a částici její p, ležící v konci průměru P ku O normalného, p^I.

Předpokládejme, že hrana otočí se o úhel α do polohy ${}^{\alpha}K$, tuť průmět její ${}^{\alpha}K^I$ bodem O^I ovšem procházeje, bude s K^I svírati úhel α.

Částice p zatím proběhne v hraně K oblouk příslušný úhlu $\frac{\alpha}{2}$, i přejde v polohu ${}^{\alpha}p$, průmět její ${}^{\alpha}p^I$ obsažen bude v průmětu hrany.



Obr. 1.

Polohy ${}^{\alpha}p$ mohla by částice dospěti i tak, že by v hraně kruhové po celé otočení z K do ${}^{\alpha}K$ zůstala v klidu (klid relativní), a teprve v ${}^{\alpha}K$ že by z polohy počátečné, již tu zveme p_{α}, o úhel $\frac{\alpha}{3}$ v příslušném smyslu po hraně se pošinula.

Tato poznámka vede k následujícímu stanovení průmětu ${}^{\alpha}p^I$: Hranu ${}^{\alpha}K$ promítneme klinogonalně v prvou průmětnu tak, aby průmět ${}^{\alpha}K^{II}$ shodný byl s hranou ${}^{\alpha}K$.

Částice p, která dle vyloženého zůstala v p_{α}, promítne se tu v $p^{II}_{\alpha} \equiv p_{\alpha}$.

K sobě náležitě průměty klinogonalné a orthogonalné jednotlivých částic hybné hrany ${}^{\alpha}K$ budou pak veskrze v normalách ku ${}^{\alpha}K^{I}$, jedny v ${}^{\alpha}K^{II}$, druhé v ${}^{\alpha}K^{I}$ obsaženy.

Klinogonalný průmět ${}^{\alpha}p^{II}$ částice p v závěrečné poloze stotožní se s koncem oblouku, jenž v ${}^{\alpha}K^{II}$ přísluší středovému úhlu $\frac{\alpha}{3}$, maje počátek v p^{I}, orthogonalný průmět ${}^{\alpha}p^{I}$ dle dřívějšího stotožní se s patou normaly z ${}^{\alpha}p^{II}$ ku ${}^{\alpha}K^{I}$ spuštěné.

Tím řádem, úhel α vždy větší a větší si myslíce, užitím zmíněného promítání klinogonalného dojdeme orthogonalných průmětů částice hybné v polohách dalších.

Pro $\alpha = 180^0$ bude ku př. nanésti v průmětu klinogonalném úhel $\frac{1}{3} 180^0 = 60^0$, čímž obdržíme průmět ${}^{\tau}p^{I}$ částice v poloze ${}^{\tau}p$; tento bude, poněvadž tu ${}^{\tau}K^{I}$ stotožní se s K^{I}, obsažen v úsečce K^{I} a to na konci její třetí čtvrtiny, jestliže od p^{I} počítáme.

Pokládajíce ${}^{\tau}p^{I}$ za pol a K^{I} za osu polárnou, určeme rovnici geom. místa orthogonalných průmětů částice p.

Jesti tu, prohlédneme-li ku obr. 1.,

$$\overline{{}^{\tau}p^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}^{2} = \overline{o^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}^{2} + \overline{o^{I}\,{}^{\tau}p^{I}}^{2} + 2\,.\,\overline{o^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}\,.\,\overline{o^{I}\,{}^{\tau}p^{I}} \cos\alpha \qquad (1)$$

Poněvadž pak

$$\overline{{}^{\tau}p^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}} = \varrho,$$

$$\overline{o^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}} = 2r\cos\frac{\alpha}{3},$$

$$\overline{o^{I}\,{}^{\tau}p^{I}} = r,$$

lze rovnici (1) psáti takto:

$$\varrho^2 = r^2\left(1 + 4\cos^2\frac{\alpha}{3} + 4\cos\frac{\alpha}{3}\cos\alpha\right),$$

čili, poněvadž

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3},$$

$$\varrho^2 = r^2\left(1 - 8\cos^2\frac{\alpha}{3} + 16\cos^4\frac{\alpha}{3}\right),$$

z čehož plyne

$$\varrho = r\left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} + 1\right). \tag{2}$$

Na místě úhlu α zaveďme úhel φ.

Z trojúhelníka $o^I {}^\alpha p^I {}^\tau p^I$ vychází podle věty sinusové

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\alpha}{3}\sin(\alpha - \varphi),$$

zároveň však jest, jak z trigonometrie známo,

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Je-li rozvržení v činitele na pravých stranách posledních dvou rovnic souhlasné, musí býti

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\alpha}{3},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin(\alpha - \varphi),$$

a tudíž jednak $$\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{3}, \tag{3}$$

jednak $$\frac{\varphi}{2} = \alpha - \varphi. \tag{4}$$

Z rovnice (4) řešením podle φ vychází pro $\frac{\varphi}{2}$ táž hodnota jako z rovnice (3). Z toho patrno, že hodnota z rovnice (3) plynoucí jest správna.

Dosadíme-li odtud za $\frac{\alpha}{3}$ do rovnice (2), na místě $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ píšíce známou z trigonometrie hodnotu equivalentní $\frac{1+\cos\varphi}{2}$, obdržíme konečně

$$\varrho = r(2\cos\varphi + 1),$$

hledanou to polarnou rovnici orthogonalného průmětu křivky sferické, částicí p opsané.

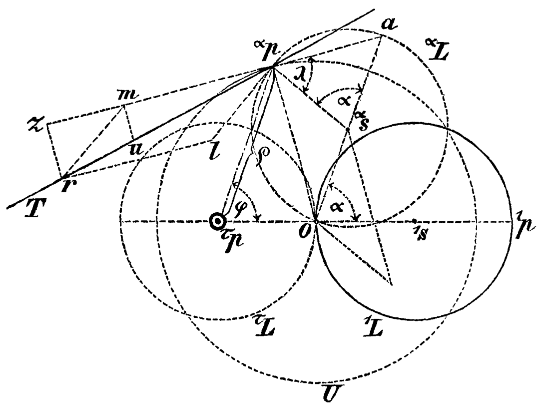
Rovnici takovou má však *závitnice Pascalova* *), a jest tedy *tato* křivka rovinná průmětem oné sferické.

---

*) Polárná rovnice závitnice Pascalovy v tvaru nejjednodušším zní: $\varrho = b\cos\varphi + a$.

Z dalších zákonů výtvarných, které ještě zmíniti hodlám, napřed uveden buď tento:

Otáčí-li se kruhová hrana L o poloměru r ve své rovině kol vlastní částice o s úhlovou rychlostí rovnou oné, s kterou se po ní pohybuje částice p, vytvoří *závitnici Pascalovu.*



Obr. 2.

Přejde-li střed s hybné kruhové hrany (obr. 2.) z počáteční polohy ${}^1s$ do ${}^\alpha s$, proběhnuv oblouk α, přejde hybná částice z polohy ${}^1p$ do ${}^\alpha p$.

Je-li $\sphericalangle\, \alpha = 120^0$, zaujme částice polohu ${}^\tau p$ na konci průměru $\overline{{}^1po}$ o polovici prodlouženého.

Pokládajíce ${}^\tau p$ polem a přímku $\overline{{}^\tau p\, {}^1p}$ osou polárnou, vyšetřme polárnou rovnici geom. místa částice p.

Jesti tu $\overline{{}^\tau p\, {}^\alpha p} = \varrho$ průvodičem, $\sphericalangle\, {}^1p\, {}^\tau p\, {}^\alpha p = \varphi$ úhlem polarným.

Z rovnoramenného $\triangle\, {}^\alpha s\, {}^\alpha p o$ vychází

$$\overline{{}^\alpha po} = 2r \cos \frac{\alpha}{2},$$

z $\triangle\, {}^\tau p\, {}^\alpha p o$ pak dle věty sinusové:

$$\varrho = \frac{2r \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}. \tag{1}$$

Poněvadž, jak na pohled zřejmo,

$$\sphericalangle {}^{\tau}p o {}^{\alpha}s = \sphericalangle o\, {}^{\alpha}s\, {}^{\alpha}p,$$

a

$$\overline{{}^{\tau}p o} = \overline{{}^{\alpha}s {}^{\alpha}p},$$

jest

$$\overline{{}^{\tau}p {}^{\alpha}p} \parallel \overline{o {}^{\alpha}s}$$

a tudíž

$$\varphi = \alpha,$$

což dosazeno do (1) činí

$$\varrho = r \frac{\sin \frac{3\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

nebo, rozvedeme-li sinus v čítateli a zkrátíme-li jmenovatelem, po malé redukci

$$\varrho = r \left[4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right].$$

Kterémuž výrazu po způsobu prvé uvedeném snadno jest dáti tvar

$$\varrho = r (2 \cos \varphi + 1),$$

tudíž tvar rovnice závitnice Pascalovy, což bylo dokázati.

Druhý výtvarný zákon zní: Posouvá-li se po kruhové hraně K poloměru r středem svým s hrana kruhová L s ní shodná a v její rovině obsažená, se stálou rychlostí úhlovou a po této hraně L částice p s úhlovou rychlostí dvakráte větší, opíše p závitnici Pascalovu.

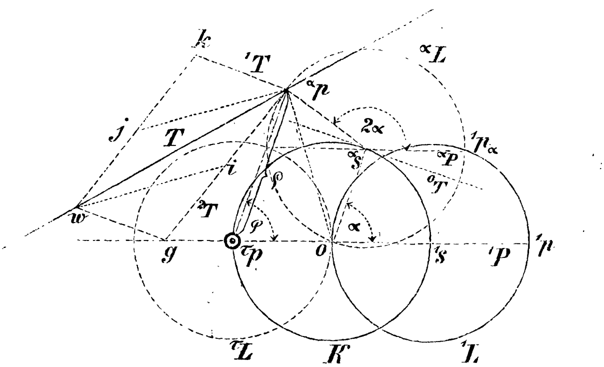
Přejde-li (viz obr. 3.) střed s hybné kruhové hrany L z polohy ${}^{1}s$ do ${}^{\alpha}s$, proběhnuv oblouk α, přemístí se průměr P, v němž částice p leží, z polohy ${}^{1}P$ do rovnoběžné polohy ${}^{\alpha}P$, částice pak na místě do ${}^{1}p_{\alpha}$ do ${}^{\alpha}p$, tak že

$$\text{arc}\ \widehat{{}^{1}p_{\alpha} {}^{\alpha}p} = 2\,\alpha.$$

Délka $\varrho = \overline{{}^{\alpha}p {}^{\tau}p}$ vyjádří se jako v případu předešlém, i vznikne zas rovnice *závitnice Pascalovy.*

Třetí zákon výtvarný praví:

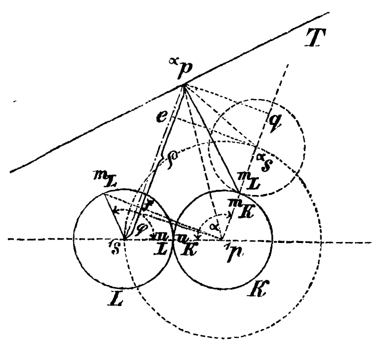
Valí-li se hrana kruhová L vně po shodné kruhové hraně K, jež s ní jest v téže rovině, opisuje částice p od středu hrany



Obr. 3.

L o její průměr vzdálená a s ní pevně spojená, závitnici Pascalovu. Jest tudíž křivka tato epicykloidou prodlouženou.*)

Hrany K a L, obě o průměru r, v poloze počáteční dotýkejte se v částicích u_K, u_L (viz obr. 4.).



Obr. 4.

Mysleme si, že odvalí se hrany L oblouk $\widehat{um_L} = \alpha$; střed s hrany té přejde z polohy ${}^1s$ do ${}^\alpha s$, i setká se její částice m_L s částicí m_K, pro niž platí

*) Sr. s tím: Jarolímek, Geometrie pro IV. tř. škol realných, 3. vyd., pag. 60.

$$\text{arc}\ \widehat{u_K m_K} = \alpha .$$

Při tom částice p přejde z polohy ${}^1p$ do polohy ${}^\alpha p$, kterou snadno vyšetříme. Zůstaneť částice v této poloze s m_K a ${}^\alpha s$ v téže souvislosti, v jaké bylo ${}^1p$ s m_L a ${}^1s$.

Třeba tedy sestrojiti s trojúhelníkem $m_L {}^1s {}^1p$ shodný $\Delta\, m_K {}^\alpha s {}^\alpha p$; jeho roh ${}^\alpha p$ podává částici v nové poloze.

Snadno tu, provedše to graficky, poznáme, že průvodič $\varrho = \overline{{}^1s\, {}^\alpha p}$ jest rovnoběžný s poloměrem $\overline{{}^1p m_K}$.

Sestrojíme-li pak

$$\overline{{}^\alpha se} \perp \varrho$$
$$\overline{{}^1pf} \perp \varrho,$$

bude

$$\varrho = \overline{{}^\alpha pe} + \overline{f {}^1s} + \overline{{}^\alpha s {}^1p},$$

a dosadíme-li

$$\overline{{}^\alpha pe} = \overline{f^1s} = -r \cos \alpha,$$
$$\overline{{}^\alpha s\, {}^1p} = r,$$

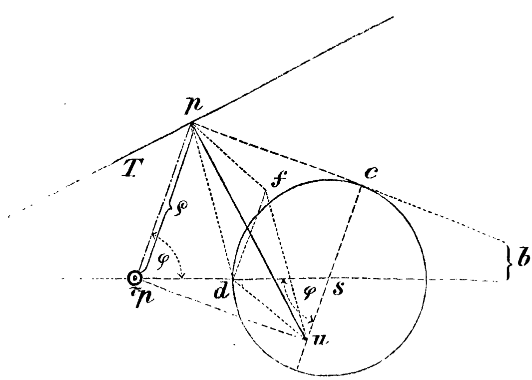
obdržíme

$$\varrho = 2\,(-r \cos \alpha) + r,$$

čili, poněvadž

$$\alpha = 180^0 - \varphi,$$
$$\varrho = r\,(2 \cos \varphi + 1),$$

tudíž rovnici *Pascalovy závitnice*, což bylo dokázati.



Obr. 5.

Konečně ještě platí: Závitnice Pascalova jest úpatnicí křivky kruhové K vzhledem k bodu ${}^{\tau}p$, jenž od obvodu kruhového o poloměr jest vzdálen.*)

Z Δsbc (viz obr. 5.) vychází

$$\overline{sb} = \frac{r}{\cos\varphi},$$

z Δabp pak

$$\overline{ap} = \varrho = \overline{ab}\cos\varphi,$$

a poněvadž

$$\overline{ab} = 2r + \frac{r}{\cos\varphi},$$

jest konečně

$$\varrho = r\left(2 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi,$$

tudíž

$$\varrho = r\,(2\cos\varphi + 1),$$

jako svrchu.

Strojení tečen.

Zákon výtvarný, z počátku pojednání tohoto vyložený, vykazuje též zvláštní spůsob strojení tečny, jejž v následujícím vyložíme.

Především je na jevě (viz obr. 1.), že tečna v bodu ${}^{\alpha}p^{I}$ jest orthogonalným průmětem tečny ku sférické křivce v bodě ${}^{\alpha}p$, dále pak, že jest tečna prostorové křivky, pokud se polohy týče, totožna s výslednicí dvou sil, jež na částici p v poloze ${}^{\alpha}p$ působí, nutíce ji jedna s hranou otáčecí, druhá v této hraně, pokaždé tedy v určité dráze kruhové, se pohybovati.

První z těch sil účinkuje v tečně ${}^{1}T$ bodu ${}^{\alpha}p$ kruhové křivky U, v níž by se částice pohybovala, kdyby zůstala v hraně v klidu, druhá jest ${}^{2}T$, tečna to v bodě ${}^{\alpha}p$ ku hraně K, když tato jest v poloze ${}^{\alpha}K$. Poněvadž úhlová rychlost pohybu v hraně ${}^{\alpha}K$ jest třikrát menší, budou se dráhy, jež by se za touž dobu

*) Úpatnicí křivky vzhledem k nějakému bodu rozumí se geom. místo pat kolmic z onoho bodu ku jejím tečnám.

v jednom a druhém směru proběhly, k sobě míti jako poloměr r_1 kruhové hrany U ku třetině poloměru $2r$ hrany K. Budou tedy složky příslušného rovnoběžníka sil úměrny těmto délkám, úhlopříčka jeho průmětu bude žádanou tečnou závitnice.

Vztyčíme-li tedy v obraze 1. v tečce ${}^{\alpha}p_1$ ku ${}^{\alpha}K_1$ kolmici délky r_1, kterouž vnesme tak, aby její konec m_1 směřoval od počátku ${}^{\alpha}p_1$ v onu stranu, v kterou částice při pohybu svém z ${}^{\alpha}p$ se šine, máme již obraz jedné strany rovnoběžníka; jeho druhé strany obraz orthogonalný padá do ${}^{\alpha}K_1$, klinogonalný do tečny ${}^{2}T_2$ v ${}^{\alpha}p_2$ ku ${}^{\alpha}K_2$, i končí tečkou n_2, jež od ${}^{\alpha}p_2$ jest o $\frac{r}{3}$ vzdálena.

Orthog. obraz n_1 bodu n jest v patě kolmice z n_2 ku ${}^{\alpha}K_1$, tím pak i druhá strana obrazu rovnoběžníka je stanovena.

Doplníme-li protilehlými dvěma, bude úhlopříčka T_1 tečkou ${}^{\alpha}p_1$ procházející, žádanou tečnou.

Neméně snadno sestrojíme tečny ve třech následujících případech, tolikéž na pohybu založených.

V případě, jenž obrazem 2. vyjádřen, bude postup tento:

Částice p z polohy ${}^{\alpha}p$ především jest puzena ve směru tečné v ${}^{\alpha}p$ ke kruhové hraně U, tudíž v normále ku $\overline{o\,{}^{\alpha}p}$, ježto pak se po svém kruhu L šine, zároveň ve směru tečné k němu, tedy v normále ku $\overline{{}^{\alpha}p\,{}^{\alpha}s}$.

Přeneseme-li v prvou tečnu délku poloměru prvého, v druhou pak druhého kruhu, od ${}^{\alpha}p$ počínajíce, obdržíme složky rovnoběžníka sil, jehož příslušnou úhlopříčkou jest žádaná tečna. Rovnoběžník ten, doplněním obdržený, budiž ${}^{\alpha}pmrl$, a na jiném místě se k němu vrátíme.

V případě následném (viz obr. 3.) částice z polohy ${}^{\alpha}p$ především puzena jest posouvající se hranou kruhovou L ve směru tečny ${}^{1}T$ v bodě ${}^{\alpha}p$, která jest rovnoběžna s tečnou ${}^{0}T$ v bodě ${}^{\alpha}s$ ku křivce kruhové K, zároveň pak, pohybujíc se ve své hraně, směrem tečné ${}^{2}T$ ku hraně této.

Třeba tedy jen na tečnu prvou přenésti délku r kruhu K, na druhou pak dvojnásobnou délku $2r$ poloměru kruhu L, pokaždé od ${}^{\alpha}p$ jako počátku; příslušná úhlopříčka kosodélníka ${}^{\alpha}pgwk$, délkami těmi na tečnách těch jako stranami určeného, jest žádanou tečnou.

Rozpůlíme-li delší strany tohoto kosodélníka v i a j a spojíme-li s rohy w, ${}^{\alpha}p$, obdržíme v něm kosodélník nový ${}^{\alpha}piwj$, o kterém snadno dokážeme, že jest shodný s předešle uvažovaným kosodélníkem ${}^{\alpha}plrm$. Strana $\overline{{}^{\alpha}pi}$ rovná se r, tedy straně $\overline{{}^{\alpha}pl}$ onoho, a jsouc jako ona tečnou ku ${}^{\alpha}L$, jest s ní i stejnolehlá.

Pak jest tu strana druhá $\overline{iw}$, základna to rovnoramenného trojúhelníka igw, jehož ramena mají délku r. Z konstrukce vychází, že ramena ta kolmo jsou ku ramenům s nimi stejně dlouhým trojúhelníka ${}^{\alpha}p{}^{\alpha}so$, i jest tedy půdice rovna půdici trojúhelníka toho, čili příčka $\overline{iw}$ kosodélníka ${}^{\alpha}pgwk$ stejná i stejnolehlá se stranou tr kosodélníka předešlého. Že obdobné platí též pro úhlopříčky $\overline{{}^{\alpha}pr}$, $\overline{{}^{\alpha}pw}$, jest na bíledni, tím pak shoda obou konstrukcí dokázána.

V případě následném (viz obr. 4.) jest, jak v nauce o trochoidách se vykládá *), tečna normálou ku přímce $\overline{{}^{\alpha}pm_K}$.

Rovněž snadno sestrojí se tečna ku křivce uvažované, pojímáme-li ji za úpatnici, kterou že jest, prvé jsme ukázali (srovn. obr. 5.). Jak z nauky o úpatnicích známo, jest normalou bodu p úhlopříčka $\overline{pu}$ obdélníka p^1puc. Snadno i v těchto dvou případech posledních shodu konstrukcí tečny dokážeme:

Jediný pohled na obr. 4. a 2. ukazuje, že $\Delta{}^{\alpha}s{}^{\alpha}p^1p$ (v obr. 4.) shodný jest s $\Delta{}^{\alpha}s{}^{\alpha}po$ (v obr. 2.), poněvadž pak, jakož srovnáním obr. 2. a 5. na jevo vychází,

$$\Delta{}^{\alpha}s{}^{\alpha}po \cong \Delta fpd,$$

*) Sr. Jarolímek, spis již citovaný, pag. 61.

bude i

$$\Delta^{\alpha}s^{\alpha}p^{1}p \cong \Delta fpd.$$

Z toho plyne však, že i kosodélníky známého nám tvaru, příslušným zdvojnásobněním těchto trojúhelníků vzniklé, budou shodny, z čehož přímo následuje shoda úhlopříček bodu ${}^{\alpha}p$ a p, normál to křivky uvažované.

Rovněž snadno zjistí se souhlas konstrukce poslední (obr. 5.) a konstrukce v obraze 2. provedené. Je to téměř opakování úvahy předešlé. Jak prve zmíněno bylo, jest úhlopříčka $\overline{pu}$ obdélníka $p^{\alpha}puc$ (obr. 5.) normálou křivky v bodu p. Tato úhlopříčka obdržela by se tolikéž z kosodélníka $pduf$, jehož různoběžné strany mají délky r_1 r. Snadno se pozná, že kosodélník ${}^{\alpha}pmrl$ (obr. 2.) je shodný s posléze jmenovaným, strany jejich pak, a proto i úhlopříčky, sobě odpovídající, na vzájem kolmé; jedna-li tedy tečnou, jest druhá normálou. A tím důkaz podán. Zbývá na závěrek jediný ještě úkol: zjistiti, že konstrukce z uvedeného na počátku zákona výtvarného plynoucí souhlasí s některou z ostatních, třeba s onou, již obsahuje obr. 2.; tím souhlas všechněch konstrukcí v tomto článku uvedených bude zajištěn. Úkol ten rozřešíme, dokážeme-li, že úhlopříčka obdélníka ${}^{\alpha}p_1m_1c_1n_1$ (obr. 1.) shoduje se s úhlopříčkou kosodélníka ${}^{\alpha}pmrl$ (obr. 2.).

Především patrno, že jednu stranu mají oba stejnou i stejnolehlou, neboť

$$\overline{{}^{\alpha}p_1m_1} \# \overline{{}^{\alpha}pm} \text{ v obr. 2.,}$$

dále jest, jak snadno poznáme, v obr. 1.

$$\sphericalangle\, o_1{}^{\alpha}p_2{}^{\alpha}p_1 = \sphericalangle\, {}^{\alpha}s^{\alpha}pa \text{ v obr 2.}$$

Úhel ten nazvěme λ a sestrojme v kosodélníku obr. 2.

$$\overline{mu} \,||\, \overline{rz} \perp \overline{{}^{\alpha}pm}.$$

Dokážeme-li, že $\overline{mu}$ v obr. 2. rovná se $\overline{m_1c_1}$ v obr. 1., bude důkaz proveden.

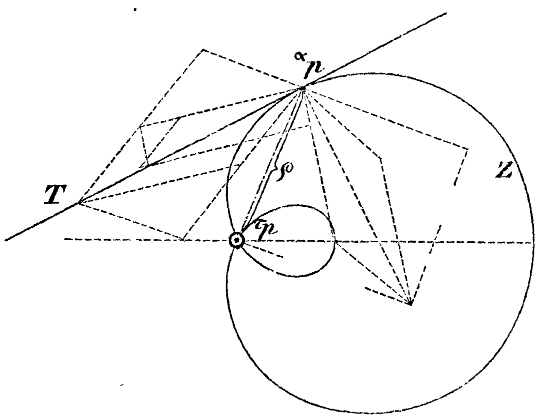
Patrně jest

$$\overline{m_1 c_1} = \frac{2}{3} r \cos \lambda,$$

nebo, poněvadž

$$\cos \lambda = \frac{\sqrt{4r^2 - r_1^2}}{2r},$$

$$\overline{m_1 c_1} = \frac{\sqrt{4r^2 - r_1^2}}{3}. \tag{1}$$



Obr. 6.

Z podobnosti trojúhelníků $rz^\alpha p$, $mu^\alpha p$ v obr. 2. vychází

$$\overline{mu} = \frac{\overline{rz} \cdot \overline{m^\alpha p}}{\overline{z^\alpha p}},$$

čili, poněvadž

$$\overline{rz} = r \cos \lambda = \frac{\sqrt{4r^2 - r_1^2}}{2},$$

$$\overline{z^\alpha p} = \frac{3}{2} r_1,$$

konečně

$$\overline{mu} = \frac{\sqrt{4r^2 - r_1^2}}{3}. \qquad (2)$$

Výsledek to shodný s výsledkem v (1) odvozeným, čímž věc dokázána.

Poznámka. Za usnadněním přehledu sneseny uvedené tu konstrukce tečny v jediný obrazec (obr. 6.).

Nové pokusy o volném pádu ve vzduchu.

Studujícím referuje

Boh. Mašek,

assistent fys. ústavu české university.

Důležitý problém kinematiky — přímočarý pohyb bodu při stálém urychlení — jest za jistých okolností uskutečněn ve přírodě ve známém úkazu volně padajícího tělesa, když pád totiž děje se v ústředí velmi málo odporujícím a když všechny částice hmoty padající mají postupný pohyb přímočarý. Pád nad to díti se musí z mírné výše, aby změna v urychlení, které se vzdáleností od země se menší, neměla patrného vlivu. Ideálný případ, kdy není vůbec ústředí odporujícího, tedy pád v prostoru vzduchoprázdném, lze jen v malých rozměrech experimentálně studovati. Pokusy velmi četné v tomto směru konané ukázaly, že pohyb v tomto případě jediné závisí na *urychlení*, které charakterisuje „gravitační pole“ zemské, kdežto ani tvar ani qualita neb quantita tělesa tu nerozhodují, takže padá stejně rychle jemné pírko jako olověná koule.

Děje-li se však pád v ústředí odporujícím, na př. ve vzduchu, změní se, jak již povrchní denní zkušenost učí, pohyb tak značně, že o rovnoměrném zrychlení nelze vůbec mluviti. Známy jsou případy, že měření — ovšem jen přibližné — hloubky studní aneb šachet, pomocí doby, které těleso — kámen na př. — volně nahoře puštěný ku proběhnutí potřebuje, nesouhlasí ani tehdy s měřením přímým, i když v úvahu vezme se rychlost zvuku. Otázka o vlivu ústředí odporujícího byla záhy diskutována a hlavní vlivy rušivé správně udány; jest to na prvém