Jan Sobotka

Příspěvek ku grafickému řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 1, 1--5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123339

Příspěvek ku grafickému řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně.

Napsal
Jan Sobotka,

1. Veškeré trinomické rovnice mající tvar

$$z^n + pz^m + q = 0, \quad (n > m), \tag{1}$$

kde p a q značí libovolná čísla, jsou representovány plochou P, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích zní

$$f = z^n + xz^m + y = 0. \tag{2}$$

Každé dvojině hodnot $x = p$, $y = q$ odpovídá jeden bod v rovině xy a kolmice k rovině bodem tím vedená seče plochu P v bodech, jejichž souřadnice z vyjadřují řešení rovnice (1).

Grafické řešení rovnice této vychází tedy na zobrazení plochy P, za kterýmžto účelem vyjadřujeme plochu tu orthogonalným průmětem jejích isoplet do roviny xy, jež volíme za rovinu obraznou. Průměty isoplet jsou přímky, jejichž rovnice obdržíme, když do (2) dosadíme za z stálé hodnoty. Tyto průměty tvoří tudíž soustavu přímek, jichž obálka h jest obrysem plochy P. Rovnici obálky té obdržíme, když z rovnic

$$f = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

vyloučíme parametr z.

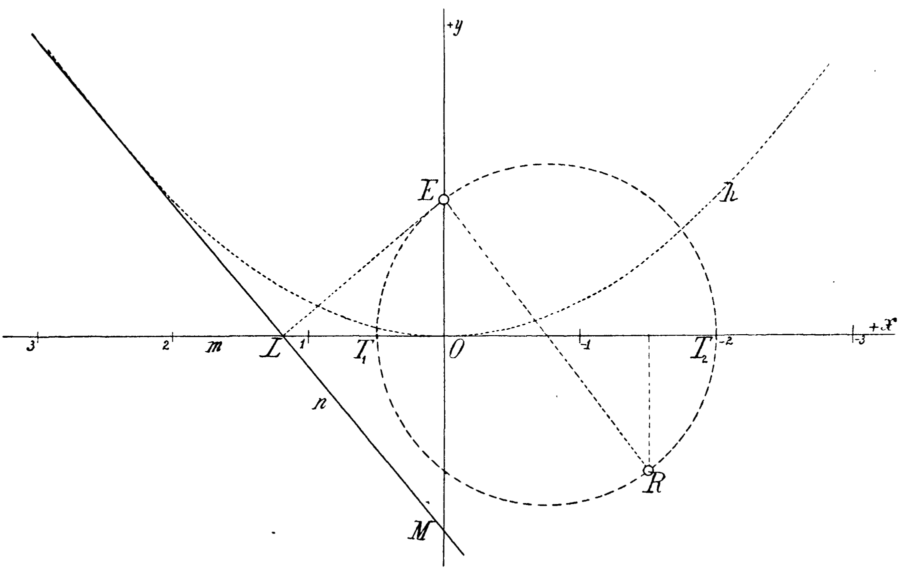
Plyne proto pro h rovnice

$$(-1)^n \left(\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m} = \left(\frac{m}{n}\right)^m x^n. \tag{3}$$

Vedeme-li tedy z bodu R roviny obrazné, jehož souřadnice jsou $p \mid q$ tečny ku h, jsou těmto příslušné hodnoty parametru z řešeními rovnice (1).

To jest podstata methody Lalanneovy pro přibližné řešení rovnic trinomických.

Podaří-li se při tom pro zmíněné tečny vyjádřiti parametr z přesně určitou úsečkou, pak dospíváme ke konstruktivnému řešení rovnice (1).



Obr. 1.

2. Proveďme takovým způsobem řešení rovnic kvadratických

$$z^2 + pz + q = 0. \qquad (4)$$

Rovnice isoplet jest zde

$$y + zx + z^2 = 0.$$

Taková přímka n vytíná na ose x úsečku $OL = -z$, na ose y úsečku $OM = -z^2$ a sestrojuje se následovně:

Na $+y$ zvolíme bod E za bod jednotkový; klademe tedy $OE = 1$ a naneseme na x úsečku $OL = -z \,.\, OE = -z$; pak jest n kolmice ku EL bodem L vedená. Tvoří následkem toho n druhé rameno úhlu, jehož prvé rameno bodem E prochází a jehož vrchol leží na x, takže přímka n obaluje parabolu h mající E za ohnisko, x za tečnu vrcholovou a rovnici

$$x^2 = 4y. \tag{5}$$

Abychom tedy rovnici (4) rozřešili, klademe z bodu $R(p\,|\,q)$ tečny t_1, t_2 k parabole h; protínají-li tyto x v bodech T_1, T_2 jest

$$\overline{OT_1} = -z_1 \,.\, \overline{OE},\ \overline{OT_2} = -z_2 \,.\, \overline{OE}.$$

Zřídíme tudíž na x měřítko m tak, aby základní jednotka jeho rovnala se $\overline{OE}$, bod nullový aby splynul s počátkem O souřadnic a kladný smysl jeho aby splynul se záporným osy x.

Tím dospíváme ke konstrukci:

Nad RE jakožto průměrem opíšeme kružnici; seče-li ona měřítko m v bodech T_1, T_2, jsou čísla těmto bodům příslušná kořeny rovnice (4).

Jest tedy

$$z_1 = \frac{OT_1}{OE},\qquad z_2 = \frac{OT_2}{OE}$$

s příslušným znaménkem na měřítku.

Jelikož pro body $(x\,|\,y)$ vně paraboly h ležící následkem rovnice (5) vždy $x^2 > 4y$, pro body vnitř ale $x^2 < 4y$ a pro body na h $x^2 = 4y$, vyplývá z konstrukce, že rovnice má dva různé kořeny, je-li $p^2 > 4q$, nebo $p^2 < 4q$, při čemž v prvém případě kořeny ty jsou realné, v druhém imaginarní, kdežto pro $p^2 = 4q$ oba kořeny splývají.

3. Také pro *kubickou rovnici*

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{6}$$

lze konstruktivné řešení touto cestou snadno geometricky odvoditi.

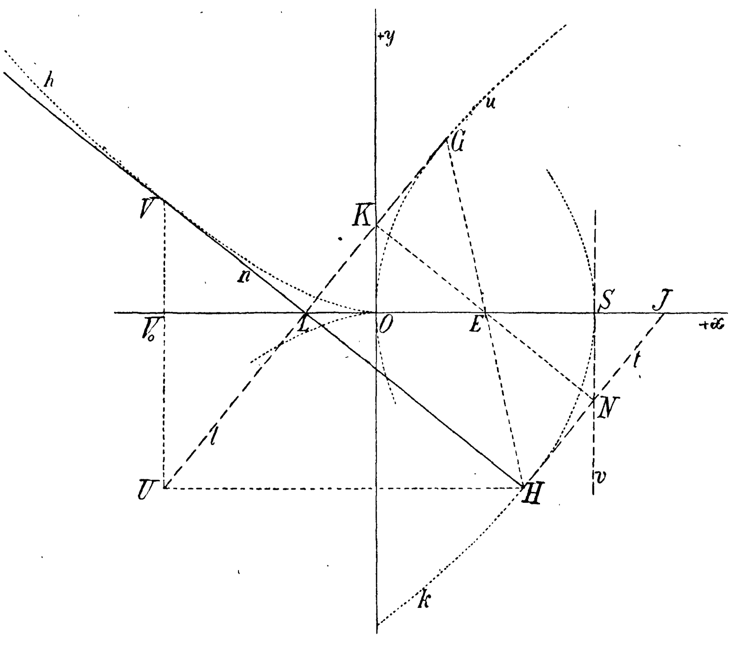
Zde jest rovnice isoplet

$$y + zx + z^3 = 0.$$

Taková přímka n utíná na ose x úsečku $OL = -z^2$, na ose y úsečku $OM = -z^3$, z čehož plyne následující konstrukce její.

V positivné části osy x zvolíme bod jednotkový E, kladouce $OE = 1$ a naneseme na osu y úsečku $OK = z \,.\, OE = z$; pak seče kolmice l v K ku EK vztýčená osu x v bodě L, pro nějž jest $OL = -z^2$, následkem čehož přímka n jde bodem L rovnoběžně ku EK.

Mění-li se z, tu mění l svou polohu a obaluje obyčejnou parabolu u mající E za ohnisko a y za přímku vrcholovou, kdežto n obaluje křivku h.



Obr. 2.

Pro bod dotyku G přímky l s u platí $KG = LK$.

Nechť protíná přímka GE přímku n v bodě H; bodem tím veďme rovnoběžku t ku l, která nechť KE seče v bodě N. Konečně veďme bodem N rovnoběžku v ku y a označme S bod $v \,.\, x$.

Poněvadž E půlí vzdálenosť mezi y a v, proto, pohybuje-li se K na y, pohybuje se N na v, takže t obaluje parabolu k mající E za ohnisko, v za tečnu vrcholovou. Značíme-li I bod $t . x$ jest $NH = IN$ a tedy jest H bod dotyku přímky t s parabolou k, pročež přímka n jest normalou paraboly k v bodě H.

(Dokončení.)

O vlastnostech Newtonova a logarithmického potenciálu i jeho prvních derivací v některých jednoduchých singularitách hmotných ploch a křivek.

Napsal

Dr. **František Graf** v Praze.

V elementární theorii potenciálu předpokládá se, že hutnosť fluida jest spojitou funkcí místa na ploše resp. křivce; přestává-li tato funkce být spojitou, je třeba dle její povahy specielní analyse o vlastnostech potenciálu. Chci se na tomto místě nejprve zabývati případem, že sice hutnosť fluida není nikde nekonečnou, ale jest nespojitou. U ploch budiž μ vyjádřeno funkcí, která není spojitou, překročíme-li dané křivky na ploše; u hmotných křivek pak mysleme si hutnosť jako funkci, která jen v diskretních bodech má po obou stranách rozdílné hodnoty. Jelikož zde jednám o analyticky definovaných plochách resp. křivkách, chci z nekonečné rozmanitosti útvarů těchto vzíti v úvahu nejdůležitější druh: plochy, mající v každém bodě jen omezený počet rovin tečných, obdobně pak u křivek rovinných. Dále předpokládám, že v okolí každého bodu plochy rovnice její dá se vyvinouti následovně:

$$z' = ax'^2 + 2bx'y' + cz'^2 + \cdots$$

je-li XY rovina tečná. (Obr. 1.) Podobně ovšem co se týče čar v rovině. Je-li fluidum na takto vytčených plochách resp. křivkách uvedeným způsobem dislokováno, poučí nás, jak později uvidíme, studium jeho potenciálu o vlastnostech této funkce odpovídající plochám s hranami a kraji, resp. křivkám neuzavřeným.