Jsou-li půdice $P = ABC$ a $p = CDE$ tak sestaveny, že stejnolehlé jejich strany $AC = b$, $CE = b'$ tvoří přímku

$$b + b' = AE,$$

jest plocha

$$ABDE = P + p + \sqrt{Pp}.$$

Shledáváme totiž, že v lichoběžníku $ABCD$ se mají plochy $P : BCD = c : c'$ a v lichoběžníku $BCED$ plochy $BCD : p = a : a'$, a ježto $\triangle ABC \sim \triangle CDE$, jest $a : a' = c : c'$, následuje

$$P : BCD = BCD : p,$$

tedy

$$BCD = \sqrt{Pp}.$$

Je-li $ABCB' = P'$ a $CDED' = p'$, patrno, že také

$$ABDED'B' = P' + p' + \sqrt{P'p'}.$$

Úlohy.

Úloha 30.

Jak se dokáže co nejjednodušeji, že

$$\sum_{h=0}^{k} k_h \, n_{h+1} = (n + k)_{k+1} \; ,$$

značí-li k_h, n_{h+1}, $(n + k)_{k+1}$ *binomické koeficienty.*

Prof. dr. *F. J. Studnička.*

Úloha 31.

Je-li x *průměr veličin* a, b,
y „ „ a, x,
z „ „ b, x,
u „ „ x, y,

jest $x = u$. *Dokázati o průměru arithmetickém, geometrickém i harmonickém.*

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 32.

Řešiti jest rovnici:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \sin(R-x) & \sin(2R-x) \\ \sin(R-x) & \sin(2R-x) & \sin x \\ \sin(2R-x) & \sin x & \sin(R-x) \end{vmatrix} = 0.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 33.

Obvod kruhové výseče jest $2p$, obsah její q^2. Vypočítati poloměr r, oblouk s a úhel středový α.

Týž.

Úloha 34.

Úhel 45^0 rozložiti ve dvě části x a y tak, aby součet

$$2\,tg\,x + 3\,tg\,y$$

měl hodnotu co nejmenší.

Týž.

Úloha 35.

Je-li $\sin 2\alpha \cos\alpha = \sin 2\beta \cos\beta$,

jest buď $\sin\alpha - \sin\beta = 0$,

aneb $\sin^2\alpha + \sin\alpha \sin\beta + \sin^2\beta = 1$.

Prof. *Václav Jeřábek.*

Úloha 36.

V různoběžníku souměrném $ABCD$, v němž BD jest osou a E průsečíkem úhlopříček, jest součet úhlů $\beta + \delta = 90^0$. Úseky $AE = a$, $BE = b$, $ED = c$ tvoří řadu arithmetickou, v níž první člen a jest dán. Jaká jest to řada?

Týž.

Úloha 37.

V trojúhelníku pravoúhlém jest vedena symmetrála úhlu pravého, která seče přeponu AB v bodu O. Ze středu O sestrojená kružnice, odvěsen se dotýkající, nechť protíná přeponu v bodech E a F. Je-li E bodem mezi O a B ležícím a CD výška trojúhelníka, jest:

1. $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{a+b}{a-b+c}$, 2. $\dfrac{ED}{DF} = \dfrac{a-b+c}{-a+b+c}$.

Týž.

Úloha 38.

Danému kruhu jest opsán lichoběžník $ABCD$ $(AD \parallel BC)$. Dokázati, že úhlopříčky AC a BD se protínají na průměru, který dotyčné body rovnoběžných stran spojuje.

Prof. *Václav Jeřábek.*

Úloha 39.

V trojúhelníku ABC jest $V_c V_c' = c^2$; dokažte, že

$$t_c = \frac{c}{2}\sqrt{5},$$

značí-li: V střed orthocentrický (průsečík výšek), V_c délku výšky CC_1, $CV = V_c'$ její hořejší úsek, t_c délku těžnice CT a c délku strany AB.

Týž.

Úloha 40.

Sestrojiti trojúhelník, je-li dán vrchol A, střed S kružnice vepsané, pata D symmetrály AS ve straně BC a rozdíl úhlů $B - C$.

Týž.

Úloha 41.

V lichoběžníku $ABCD$ jest vedena příčka z kteréhokoliv bodu M podstavy jedné AB ku středu N podstavy druhé CD. Spojnice AN, MD protínají se v bodu R a BN, NC v bodu S. Dokázati, že přímky AS, BR a MN protínají se v témž bodu.

Týž.

Úloha 42.

V kosočtverci $ABCD$, jehož úhlopříčka AC rovná se straně AB, vedena jest vrcholem D přímka strany AB, BC a úhlopříčku CA v bodech C_1, A_1 a B_1 tak protínající, že $A_1C_1 = DB_1$. Dokázati: 1. že $AB_1 = CA_1 = BC_1$, a 2. že bod B_1 dělí úhlopříčku AC dle zlatého řezu. Na základě poslední vlastnosti sestrojte příčku DC_1.

Týž.

Úloha 43.

V trojúhelníku ABC jest příčka AA' symmetrálou úhlu BAC; patou její A' buďtež vedeny příčky $A'B' \parallel BA$, $A'C' \parallel CA$. Dokázati, že

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{bc}{(b+c)^2},$$

kdež Δ *a* Δ' *značí ploské obsahy trojúhelníkův* ABC *a* $A'B'C$.

Prof. *Václav Jeřábek.*

Úloha 44.

V trojúhelníku pravoúhlém ABC *jsou vedeny ostrými úhly* A, B *příčky* AA_1, BB_1, *které tvoří s odvěsnami úhly* $CAA_1 = \alpha$, $CBB_1 = \beta$, *a utínají na odvěsnách* $CB = a$, $CA = b$ *úseky* $CA_1 = a_1$, $CB_1 = b_1$.

Je-li $ab = aa_1 + a_1b_1 + ba_1$, *jest* $\alpha + \beta = 45^0$. *Dokázati.*

Týž.

Úloha 45.

V kruhu trojúhelníku ABC *opsaném jest vedena středem strany* AB *tetiva* $B_1C_1 = a_1$ *rovnoběžně se stranou* BC. *Dokažte, že*

$$4(a^2a_1^2 + b^2c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Týž.

Úloha 46.

Je-li v kruhu rovnostrannému trojúhelníku opsaném vedena tetiva $B_1C_1 = x$ *půlícími body dvou stran, jest prostá délka*

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

kdež a *značí délku strany rovnostranného trojúhelníka.*

Týž.

Úloha 47.

Řešiti rovnoramenný trojúhelník, jehož rameno jest o 29·1 cm menší než půdice a úhel ramen o $50^0\ 59'\ 30''$ *větší než úhel při půdici.*

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 48.

V rovnoramenném lichoběžníku jest délka ramene $c = 13$, *střední příčka* $p = 35$, *úhel při půdici* $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$. *Vypočítati obě půdice, výšku a úhlopříčku lichoběžníku.*

Týž.

Úloha 49.

Sestrojíme-li ke kružnici poloměru r a středu o v bodě a tečnu a přeneseme-li na tuto tečnu úsečku

$$\overline{am} = \frac{9}{14} r = \frac{1}{2} r + \frac{1}{7} r,$$

protíná spojnice $\overline{om}$ kružnici v bodě b tak, že $\overline{ab}$ přibližně rovná se straně pravidelného 11tiuhelníka do kružnice vepsaného. S jakou přesností? Prof. *A. Strnad.*

Úloha 50.

V kterém poměru jest obsah pravidelného pětiúhelníka abcde k obsahu trojúhelníka abd? *Týž.*

Úloha 51.

V přímé řadě za sebou leží místa a, b, c tak, že $\overline{ab} = 228$ m, $\overline{bc} = 264$ m. Ze stanoviska s pozorována tato místa v úhlech $asb = 50^0 41' 33''$, $bsc = 33^0 58' 53''$. Vypočítati sa, sb, sc. *Týž.*

Úloha 52.

Na hranách trojhranu, jehož hrany jsou vzájemně kolmé, odtíná rovina úseky $\overline{oa} = a$, $\overline{ob} = b$, $\overline{oc} = c$. a) Který jest obsah trojúhelníka abc? b) Kterou vzdálenost má rovina abc od vrcholu trojhranu o? *Týž.*

Úloha 53.

Do rovnostranného kužele vepsati krychli. Úloha budiž řešena počtem i konstrukcí. *Týž.*

Úloha 54.

V kterém poměru jest plášť kužele komolého o poloměrech $r_1 = 14$, $r_2 = 6$ a výšce $v = 17$ k plášti dvojkužele o týchž základnách? *Týž.*

Úloha 55.

Odřízneme-li všechny hořejší rohy krychle rovinami jdoucími dolejšími vrcholy a středy hran hořejších, obdržíme 10tistěn. Jak velký jest povrch a krychlový obsah tohoto tělesa, je-li dána hrana krychle? Prof. *Václav Jeřábek.*

Úloha 56.

Do koule o poloměru daném r jest vepsán kužel, jehož plášť p rovná se třem polovinám hlavního kruhu koule. Jak velký jest úhel při vrcholu tohoto kužele? *Týž.*

Úloha 57.

Dva vrcholy rovnostranného trojúhelníka dány jsou v pravoúhlé soustavě souřadnicemi a (2, 2), b (6, 5). Které souřadnice má vrchol třetí? Mohou všechny tři vrcholy rovnostranného trojúhelníka míti racionálné souřadnice? Prof. *A. Strnad.*

Úloha 58.

Střed pravidelného osmiuhelníka jest v počátku soustavy pravoúhlé, jedna strana jeho má rovnici $x + y = a$. *Které jsou souřadnice vrcholů, které rovnice ostatních stran a které rovnice úhlopříček?* *Týž.*

Úloha 59.

Který význam v pravoúhlé soustavě souřadnic má rovnice

$$\frac{mx + ny}{x + y} + \frac{nx - my}{x - y} = p?$$

Týž.

Úloha 60.

V trojúhelníku ABC jest podstava $AB = c$ *pevna a vrchol C proměnlivý. Je-li* $a^2 + b^2 = 3c^2$, *jest geometrickým místem vrcholu C kružnice. Dokázati geometricky i analyticky.*

Prof. *Václav Jeřábek.*

Dodatek o řešení úloh k ročníku XXIV.

Úloha 26.

Kolikrát možná vyjádřiti součin

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)(f^2+g^2+h^2+k^2)$$

součtem čtyř čtverců $A^2+B^2+C^2+D^2$*?*

Řešení podané na str. 226. ročn. XXIV. není úplné; řešitel p. Adolf Ottis, stud. VIII. tř. g. v Plzni, shedal, že součin daný možno *54krát* (a nejen 27krát) vyjádřiti součtem čtyř čtverců. Příčina toho jest, že netoliko

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

ale i

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Následkem toho lze součin $(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)$ *šestkrát* proměniti v součet čtyř čtverců, a ježto součin $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(f^2+g^2+h^2+k^2)$ možno provésti *devětkrát*, můžeme součin $(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)(f^2+g^2+h^2+k^2)$ vyjádřiti *54krát* součtem čtyř čtverců. Při zvláštních hodnotách některé rozklady vedou k výsledkům totožným. Jmenovaný pan řešitel udává, že ku př. součin

$$(1^2+2^2)(3^2+4^2+5^2)(6^2+7^2+8^2+9^2)$$

dává 44 různých součtů; ku 24 na str. 267 (ročn. XXIV.) uvedeným připojuje ještě 20 následujících:

$180^2+110^2+106^2+42^2$	$155^2+135^2+105^2+65^2$
$175^2+105^2+91^2+87^2$	$150^2+150^2+110^2+20^2$
$173^2+129^2+97^2+39^2$	$150^2+150^2+100^2+50^2$
$171^2+125^2+103^2+45^2$	$150^2+130^2+100^2+90^2$
$171^2+123^2+83^2+79^2$	$148^2+134^2+126^2+42^2$
$165^2+135^2+95^2+55^2$	$145^2+135^2+105^2+85^2$
$165^2+125^2+95^2+75^2$	$143^2+141^2+129^2+23^2$
$164^2+110^2+102^2+90^2$	$143^2+131^2+123^2+69^2$
$157^2+141^2+107^2+39^2$	$142^2+138^2+124^2+54^2$
$156^2+138^2+86^2+82^2$	$141^2+141^2+133^2+7^2$.

Poznámka: Slovutný autor úlohy, pan prof. Dr. F. J. Studnička oznámil nám, že úlohu řešiti lze užitím poznámky obsažené na str. 67. jeho „Kvaternionů" a podal následující příklad, ve kterém součin

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)\,(5^2 + 6^2 + 7^2)\,(8^2 + 9^2)$$

rozložen v 36 součtů po 4 čtvercích:

$391^2 + 313^2 + 407^2 + 249^2$	$7^2 + 57^2 + 119^2 + 679^2$
$391^2 + 313^2 + 295^2 + 375^2$	$7^2 + 23^2 + 119^2 + 681^2$
$265^2 + 425^2 + 295^2 + 375^2$	$57^2 + 331^2 + 389^2 + 463^2$
$265^2 + 425^2 + 249^2 + 407^2$	$30^2 + 140^2 + 220^2 + 640^2$
$95^2 + 125^2 + 225^2 + 635^2$	$5^2 + 85^2 + 375^2 + 575^2$
$115^2 + 145^2 + 435^2 + 505^2$	$185^2 + 245^2 + 255^2 + 565^2$
$200^2 + 270^2 + 340^2 + 500^2$	$150^2 + 200^2 + 320^2 + 560^2$
$155^2 + 165^2 + 415^2 + 505^2$	$149^2 + 151^2 + 213^2 + 623^2$
$155^2 + 187^2 + 265^2 + 591^2$	$145^2 + 265^2 + 435^2 + 445^2$
$65^2 + 105^2 + 445^2 + 515^2$	$55^2 + 75^2 + 391^2 + 563^2$
$245^2 + 325^2 + 375^2 + 415^2$	$90^2 + 200^2 + 400^2 + 520^2$
$135^2 + 235^2 + 445^2 + 455^2$	$45^2 + 265^2 + 425^2 + 475^2$
$195^2 + 335^2 + 395^2 + 415^2$	$95^2 + 165^2 + 395^2 + 535^2$
$220^2 + 260^2 + 400^2 + 450^2$	$55^2 + 225^2 + 325^2 + 565^2$
$80^2 + 260^2 + 380^2 + 510^2$	$123^2 + 223^2 + 229^2 + 601^2$
$116^2 + 286^2 + 348^2 + 512^2$	$30^2 + 160^2 + 260^2 + 620^2$
$116^2 + 224^2 + 348^2 + 542^2$	$48^2 + 116^2 + 478^2 + 484^2$
$100^2 + 200^2 + 210^2 + 620^2$	$100^2 + 174^2 + 232^2 + 620^2$.

Správné řešení úloh z předešlého ročníku zaslali dodatečně pp.:

Emil Fischer, stud. VI. tř. g. v Pelhřimově, úl. 29., 41., 42. a 43.
Karel Kutílek, stud. VI. tř. g. v Chrudimi, úl. 29., 30., 33., 54., 55.
J. Suchý, stud. VI. tř. g. v Kroměříži, ul. 53., 54. a 55.
Jaroslav Šrámek, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 51. a 52.