Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Chalupníček

O novém sestrojování os ellipsy ze sdružených průměrů aneb za podobných podmínek

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 2, 226--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123298

Je-li 2β hranový úhel při temeni pravidelného jehlanu, 2γ středový úhel jeho základny, jest odchylka α pobočných stěn od základny vyjádřena dle pravidla Neperova sférické trigonometrie vzorcem

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Jsou-li pak stěny pravidelného mnohostěnu n-stranné a rohy jeho m-hranné, jest

$$\beta = \frac{(n-2)\,R}{n}, \qquad \gamma = \frac{2R}{m},$$

pročež

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{2R}{n}\,.\,\operatorname{ctg}\frac{2R}{m}.$$

Pro úhel ω dvou sousedních stěn mnohostěnu pravidelného jest dle téhož pravidla

$$\sin\frac{\omega}{2} = \cos\frac{2R}{m} : \sin\frac{2R}{n}$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \sin\frac{2R}{m}\,.\,\sin\alpha.$$

(Viz: Strnad, Geometrie pro vyšší reálky, 2. vyd. str. 237.)

O novém sestrojování os ellipsy ze sdružených průměrů aneb za podobných podmínek.

Napsal

inženýr **Bohumil Chalupníček**,

supplent při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

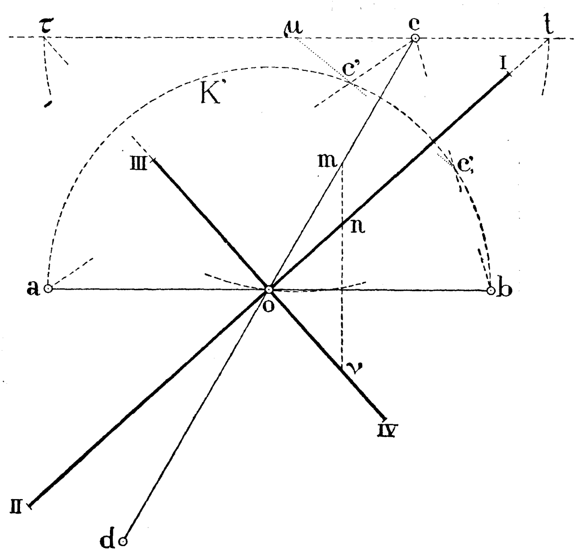
Náš výtečný, však bohužel nedávno zemřelý dv. r. prof. Ed. Weyr uvádí ve své pěkné knize „Projektivná geometrie základných útvarů prvého řádu“ na str. 147. v levo zobecněnou větu Desargues-ovu v tomto znění:

„Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, vedenou dvěma základnými body svazku mimo tyto body ještě ve dvou bodech, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce;

střed této involuce jest na spojnici druhých dvou základných bodů."

Tato důležitá věta, již dokázal dv. r. prof. Weyr před 35 lety,*) vede ku řešení různých zajímavých úloh, z nichž zde budiž uvedena konstrukce os ellipsy ze združených průměrů a za podobných podmínek.

Upravme si k naší potřebě výše zmíněnou větu následovně: Jde-li jedna ze tří kuželoseček dvěma společnými body



Obr. 1.

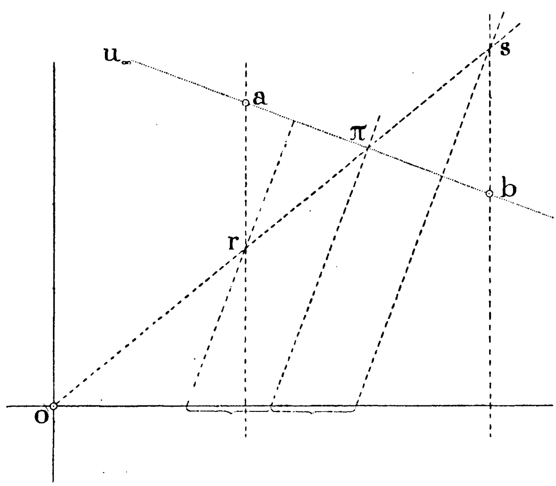
druhých dvou, prochází spojnice jejich dalších průsečíků s oněmi dvěma kuželosečkami stálým bodem, ležícím na spojnici druhých dvou společných bodů.

Použijme ihned této věty při konstrukci os ellipsy K ze sdružených průměrů *ab* a *cd*. (Obr. 1.).

Opišme nad *ab* co průměrem kružnici K'. Spojme bod *c*

*) Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth. 1868: „Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen". Von Ed. Weyr. Mit 1 Tafel. Vorgelegt in der Sitzung am 16. Juli 1868.

s body a a b, a považujme tyto dvě spojnice ac, bc za zvrhlou čili degenerovanou kuželosečku. Považujeme-li bod c za dva body soumezné, jichž spojnice jest tudíž tečna ellipsy K rovnoběžná s průměrem ab, má zvrhlá kuželosečka ac, bc s danou ellipsou 4 body společné a to: a a b a v bodu c zmíněné dva body soumezné. Mějme na zřeteli tyto tři kuželosečky: ellipsu K, kružnici K′ a zvrhlou kuželosečku ac, bc. Kružnice K′ prochází společnými body a a b druhých dvou kuželoseček, pak dle věty vyslovené, spojnice jejich dalších průsečíků $c'c'_1$ se zvrhlou kuželosečkou jakož i s ellipsou, jdou pevným bodem μ



Obr. 2.

ležícím na spojnici druhých dvou společných bodů oněch kuželoseček, to jest na tečně bodu c.

Kružnice K′ ze středu ellipsy o opsaná, má s ellipsou K dva průměry společné: ab a onen ležící v přímce μo; rozpolením úhlů těmito průměry sevřených obdržíme, jak známo, osy ellipsy co do polohy. Jest nám tedy rozpůliti úhly μoa a μob. Přímky tyto úhly půlící čili osy těchto úhlů, svírají s tečnou $\mu c \parallel ab$ tytéž úhly jako s ab. Označíme-li průsečíky os těchto úhlů s tečnou μc jako body t a τ, jsou trojúhelníky μot a $\mu o\tau$

rovnoramenné, pročež $\mu t = \mu o = \mu \tau$. Opišme tudíž z bodu μ kružnici poloměrem μo až nám protne tečnu μc v bodech t a τ. Potom to a τo jsou hledané osy ellipsy K, ovšem jenom co do polohy. Ku omezení os dospějeme následující úvahou.

Budiž dána ellipsa o středu o osami co do polohy a dvěma body a a b (obr. 2.). Sestrojme v bodech a a b normály ellipsy jakožto poloměry kružnic $\varkappa$ a $\varkappa'$ v těchto bodech ellipsy se dotýkajících a majících své středy na velké ose. O tyto středy nám běží, neb spojnice jich s a a b jsou ony normály. Nekonečně vzdálený bod spojnice ab označme u_∞; polára tohoto bodu vzhledem ku ellipse jest průměrem a rozpoluje v bodu π tětivu ab. Sestrojme dále poláry bodu u_∞ vzhledem ke kružnicím $\varkappa$ a $\varkappa'$; poláry tyto jdou hledanými středy těchto kružnic, ležícími na velké ose ellipsy, kolmo na spojnici ab. Ku sestrojení těchto polár poslouží nám známé dvě věty:*)

„Průsečík dvou přímek jest pólem spojnice jich pólů a spojnice dvou bodů jest polárou průsečíku jich polár.

Probíhá-li pól přímou řadu, otáčí se polára kolem pólu této řady.“

Kružnice $\varkappa$ i $\varkappa'$ mají s danou ellipsou společné tětivy jdoucí body a a b kolmo na velkou osu ellipsy. Označme průsečíky těchto společných tětiv s polárou $o\pi$: r a s. Pak jest bod r, jakožto průsečík dvou přímek, pólem spojnice pólu u_∞ s pólem společné tětivy tímto bodem jdoucí. Tudíž dle druhé věty právě vyslovené, jde bodem r polára bodu u_∞ vzhledem ke kružnici $\varkappa$ kolmo na přímku ab a protíná velkou osu v hledaném středu této kružnice. Z týchž důvodů jde i polára bodu u_∞ vzhledem ke kružnici $\varkappa_1$ bodem s kolmo na ab a určuje na velké ose střed této druhé kružnice. Spojnice těchto středů s body a a b jsou žádané normály ellipsy.

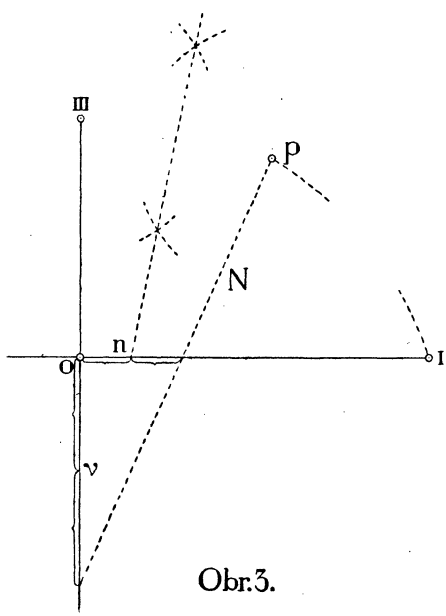
Jak z konstrukce patrno jsou trojúhelníky $ar\pi$ a $bs\pi$ shodné, a tudíž kolmice z vrcholů r a s si odpovídajících spuštěné na základny v přímce ab ležící, utínají na této stejné úsečky o společném bodu π. Z toho plyne, že kolmice v bodu π na ab vztýčená půlí vzdálenost rovnoběžných polár body r a s kolmo na ab vedených a protož půlí i vzdálenost jich průsečíků s velkou

*) *Ed. Weyr*, Projektivná geometrie.

osou ellipsy čili půlí vzdálenost průsečíků normál bodů *a* a *b* s touto osou.

Známe-li tedy normálu bodu *a* a chceme sestrojiti normálu bodu *b*, sestrojíme nejprve osu souměrnosti úsečky *ab* a přeneseme vzdálenost průsečíků normály a osy souměrnosti s velkou osou ellipsy, od tohoto posledního na druhou stranu a máme průsečík normály bodu *b* s velkou osou.

Právě vyvozený vztah mezi průsečíky normál ellipsy v bo-



Obr. 3.

dech *a* a *b* a průsečíkem osy souměrnosti úsečky *ab* s velkou osou platí, jak zřejmo, i pro malou osu.

Tohoto vztahu možno s prospěchem využíti při konstrukci normály ellipsy v bodu *p*, když tato dána mimo bodem *p*, malou osou co do polohy i délky a velkou osou jen co do polohy. (Obr. 3.). Buď III koncový bod malé osy, jež jest již normálou v tomto bodu. Osa souměrnosti úsečky III*p* protíná velkou osu v bodu *n*; přenesme délku *on* od bodu *n* na velkou osu souhlasným směrem a obdržíme bod, jímž prochází normála N bodu p.

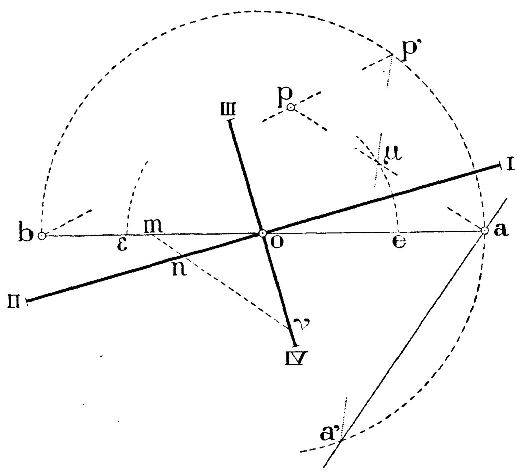
Jak patrno trojúhelník IIInp jest rovnoramenný a tudíž nIII $= np$. Taková též relace plyne pro bod v rozpolující vzdálenost středu ellipsy od průsečíku normály bodu p s malou osou. I jest $vp = v$I, kdež I jest koncovým bodem velké osy. Body n a v snadno obdržíme i tím, že vedeme bodem rozpolujícím poloměr op rovnoběžku s normálou, kterážto rovnoběžka nám určí na osách body n a v. Tohoto výsledku užijme nyní ku omezení os ellipsy v obr. 1.

Normála bodu c stojí kolmo na průměru ab. Veďme tudíž rozpolovacím bodem m poloměru oc kolmici na sdružený průměr ab, až protne velkou osu v bodu n a malou osu v bodu v. Pak dle odvozeného jest $nc = n$III $= n$IV, kdež III a IV jsou koncové body malé osy. Koncové body velké osy I a II obdržíme, učiníme-li vI $= v$II $= vc$.

Budiž dána ellipsa průměrem ab, sdruženým s ním průměrem D (co do polohy) a bodem p. Úlohou jest sestrojiti a omeziti osy. Použijme opět oné upravené věty Desarguesovy pro tři kuželosečky. První kuželosečkou jest daná ellipsa, druhou jest kuželosečka degenerovaná, skládající se ze spojnice bp a ar, značí-li r průsečík spojnice bp s průměrem D. Tyto dvě kuželosečky mají za společné body a, b, p a q; bod q jest průsečík přímky ar a rovnoběžky bodem p s průměrem ab vedené. Třetí kuželosečkou jest kružnice K′ nad průměrem ab opsaná; pak spojnice průsečíků této kružnice s ellipsou a degenerovanou kuželosečkou procházejí bodem μ ležícím na přímce $pq \parallel ab$. Rozpůlením úhlů μoa a vedlejšího obdržíme osy co do polohy. Proveďme tedy konstrukci jako v případě předešlém: opišme z bodu μ kružnici bodem o jdoucí, až protne přímku pq v bodech t a τ, jež spojeny s o určují osy. Omezení os provede se na základě oné úvahy o normále. Rozpůlí se poloměr ob (nebo oa) bodem m, a z bodu m spuštěná kolmice na průměr D protíná velkou osu v bodu n a malou v bodu v. I jest $nb = n$III $= n$IV a $vb = v$I $= v$II, při čemž římské číslice značí koncové body os ellipsy.

Mějme opět ellipsu určenu zrovna tak jako předešle; směr sdruženého průměru ku průměru *ab* buď určen tečnou *aa'* bodu *a*. (Obr. 4.).

Za degenerovanou kuželosečku volme nyní spojnici *bp* a tečnu bodu *a*. Body společné dané ellipse a kuželosečce degenerované jsou *b*, *p*, *a* a bod jemu soumezný, kteréžto dva body soumezné náleží jak ellipse tak tečně bodu *a*. Kružnice K' nad *ab* opsaná protíná degenerovanou kuželosečku v bodech *p'* a *a'*. Spojnice *p'a'* protíná přímku *pa* (to jest spojnice druhých dvou společných bodů) v bodu μ, jímž prochází též spojnice (druhých) průsečíků ellipsy s kružnicí K'. Opišme z bodu *o* kruž-

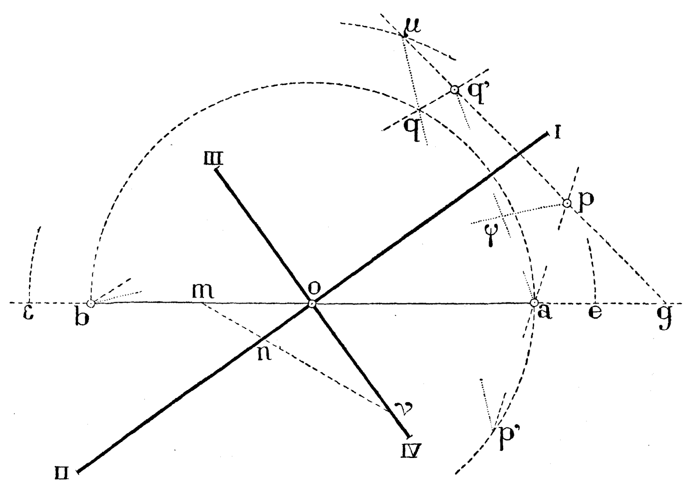


Obr. 4.

nici jdoucí bodem μ a označme její průsečíky s průměrem *ab* : *e* a ε. Přímky půlící úhly $\mu o a$ a jemu vedlejší jsou osy ellipsy co do polohy a stojí kolmo na tětivách μe a $\mu\varepsilon$ posledně opsané kružnice čili jest jedna rovnoběžna s $\mu\varepsilon$ a druhá s μe. Omezení os provedeno již dříve vyloženým způsobem.

Konečně buď dána ellipsa průměrem *ab* a dvěma body *p* a *q*. (Obr. 5.). Body *a*, *b*, *p* a *q* buďte společny dané ellipse a zvrhlé čáře *ap*, *bq*. Pak opět spojnice průsečíků kružnice K', opsané nad průměrem *ab*, se zvrhlou kuželosečkou, to jest přímka *p'q'*, a s danou ellipsou, procházejí pevným bodem μ na spojnici *pq* ležícím. Za příčinou půlení úhlů $\mu o a$ a vedlejšího opišme opět jako v předchozím obrazci kružnici z bodu o poloměrem $o\mu$ až nám protne přímku ab v bodech e a ε. Spojnice $\varepsilon\mu$ určuje směr velké osy a $e\mu$ malé osy.

Abychom omezili osy způsobem vytčeným v předešlých obrazcích, třeba znáti směr průměru sdruženého ku průměru ab. Směr onoho průměru určí nám polára bodu g, jenž jest průsečíkem přímky pq s průměrem ab, to jest přímka $\pi\psi$. Z bodu



Obr. 5.

m, rozpolujícího poloměr ob, spuštěná kolmice na $\pi\psi$ protíná osy v bodech n a ν. I jest $nb = n\text{III} = n\text{IV}$ a $\nu b = \nu\text{I} = \nu\text{II}$. Tím jsou osy omezeny.

Vyhledávání polohy os ze sdružených průměrů aneb za podobných podmínek může se díti i pomocí věty reciproké ku větě uvedené hned na počátku tohoto článku, při čemž ovšem upotřebíme opět kuželosečky zvrhlé, tentokráte ze dvou bodů sestávající, tedy kuželosečky zvrhlé tečnové.