Václav Hübner

# Stanovení odchylky roviny, která má protínati rotační plochu kuželovou v určité kuželosečce dané velikosti

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 33 (1904), No. 2, 216--221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123296

# Stanovení odchylky roviny, která má protínati rotační plochu kuželovou v určité kuželosečce dané velikosti.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

## I.

Má-li řez býti *elliptický*, jehož poloosy jsou $a$, $b$, tu platí, jak odvozeno v „Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky“ ročník XXVII. pag. 48, pro poloosy $a$, $b$ rovnice

$$a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \omega)},$$

$$b = m \cos\alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}},$$

kdež značí $\alpha$ odchylku stran kužele od jeho základny, $\omega$ hledanou odchylku, která v tomto případě musí býti menší než $\alpha$, $m$ pak odříznutou stranu kužele rovinou $\varrho$ měřenou od vrcholu kužele.

Dělíme-li obě rovnice, obdržíme

$$\frac{b}{a} = \frac{2\cos\alpha}{\sin 2\alpha}\sqrt{\sin(\alpha + \omega)\sin(\alpha - \omega)},$$

nebo

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{(\sin\alpha\cos\omega + \sin\omega\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\omega - \sin\omega\cos\alpha)}$$

čili

$$\frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\omega,$$

tudíž

$$\sin^2\omega = \frac{(a^2 - b^2)\sin^2\alpha}{a^2}$$

a

(1) $$\sin\omega = \frac{e}{a}\sin\alpha,$$

kterýžto úhel lze snadno sestrojiti.

Rovin, které by danou plochu kuželovou protínaly v ellipse určité velikosti, jest nekonečně mnoho a všechny jsou rovnoběžné s tečnými rovinami k rotační ploše kuželové, jejíž povrchové přímky mají od základny kužele hledanou odchylku $\omega$.

Z rovnice (1) poznáváme:

1. Je-li $a = b$ (tudíž $e = 0$), že jest řez kruhový a $\sin\omega = 0$, t. j. $\omega = 0$; rovina sečná jest tedy rovnoběžná se základnou kužele a protíná plochu kuželovou v křivce kruhové.

2. Je-li $\alpha = 90^0$, přejde plocha kuželová v plochu válcovou a v tomto případě jest

$$\sin\omega = \frac{e}{a}.$$

3. Je-li $\alpha = 60^0$ (kužel rovnostranný), jest

$$\sin\omega = \frac{e\sqrt{3}}{2a} = \frac{v}{a},$$

značí-li $v$ výšku trojúhelníka rovnostranného, jehož strana jest délková výstřednost $e$. Podobně upraví se vzorec pro $\alpha = 45^0$.

4. Je-li $e\sin\alpha = a$, jest $\sin\omega = 1$ a úhel $\omega = 90^0$, t. j. rovina má býti kolmá k rovině základny kužele, pak $\sin\alpha = \dfrac{a}{e}$, kterýžto případ jest nemožný, ježto $a > e$.

## II.

Při řezu *parabolickém* musí $\omega = \alpha$; daný parametr $p = 2\,m\cos^2\alpha$ (tamže pag. 50).

Z rovnice této určí se snadno úsek $m$ na straně kužele od vrcholu měřený

(2) $$m = \frac{p}{2\cos^2\alpha}.$$

Že takových rovin jest opět nekonečně mnoho, plyne z odstavce I. a všechny jsou rovnoběžné s rovinami tečnými k dané ploše kuželové.

Z rovnice (2) poznáváme:

1. Je-li $\alpha = 90^0$ (plocha válcová), jest

$$p = 0 \quad \text{a} \quad m = \infty .$$

Rovina jest rovnoběžná s povrchovými přímkami plochy válcové a protíná ji ve dvou přímkách povrchových, ve kteréž přechází řez parabolický.

2. Je-li $\alpha = 60^0$ (kužel rovnostranný), jest $m = 2p$.

3. Je-li $\alpha = 45^0$, jest $m = p$.

## III.

Má-li býti řez *hyperbolický*, musí $\omega > \alpha$. Pro poloosy $a$, $b$ platí obdobné rovnice (tamže pag. 52, 53)

$$a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\omega - \alpha)},$$

$$b = m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin(\omega - \alpha)}}.$$

Dělíme-li obě rovnice, obdržíme

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\omega + \alpha) \sin(\omega - \alpha)}$$

nebo

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{(\sin \alpha \cos \omega + \sin \omega \cos \alpha)(\sin \omega \cos \alpha - \sin \alpha \cos \omega)}$$

čili

$$\frac{b^2}{a^2} \sin^2\alpha = \sin^2\omega \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\omega = \sin^2\omega - \sin^2\alpha ;$$

tudíž

$$\sin^2\omega = \frac{\sin^2\alpha}{a^2}(a^2 + b^2)$$

a

$$\sin \omega = \frac{e}{a} \sin \alpha . \tag{3}$$

Rovin těch jest opět nekonečně mnoho a jsou rovnoběžné s rovinami tečnými k rotační ploše kuželové, jejíž povrchové přímky svírají se základnou hledanou odchylku $\omega$.

Z rovnice (3) poznáváme:

1. Je-li $a = b$ (hyperbola rovnoosá), jest

$$\sin\omega = \sin\alpha\sqrt{2}\,.$$

2. Je-li $\alpha = 60^0$ (kužel rovnostranný), jest

$$\sin\omega = \frac{e\sqrt{3}}{2a} = \frac{v}{a},$$

jako v odstavci I.

Pro $a = b$, jest $\sin\omega = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $(> 1)$, t. j. rovina neprotíná kužel rovnostranný v hyperbole rovnoosé.

Z rovnice $\sin\omega = \sin\alpha\sqrt{2}$ poznáváme, že při $\omega = 90^0$, jest $\alpha = 45^0$, při $\omega = 45^0$, jest $\alpha = 30^0$.

Jest-li tedy $\omega < 90^0$, jest $\alpha < 45^0$.

3. Je-li $\alpha = 90^0$ (plocha válcová), jest $\sin\omega = \frac{e}{a}$.

Ježto $e > a$, jest $\sin\omega > 1$ a řez jest nemožný.

Rovina neprotíná rotační plochy válcové v hyperbole.

4. Je-li $e\sin\alpha = a$, jest $\sin\omega = 1$ a úhel $\omega = 90^0$, t. j. rovina jest kolmá k rovině základny kužele; $\sin\alpha = \frac{a}{e}$.

Poloosy hyperboly jsou pak odvěsnami trojúhelníka pravoúhlého, jehož přeponou jest úsek $m$, neboť $a = m\sin\alpha$, $b = m\cos\alpha$.

5. Je-li $a = b = 0$, jest i $m = 0$, t. j. rovina prochází vrcholem kužele; a poněvadž $\omega > \alpha$, protíná rovina plochu kuželovou ve dvou přímkách povrchových, ve kteréž přechází řez hyperbolický. V odstavci I. při $a = b = 0$ jest též $m = 0$; rovina prochází rovněž vrcholem kužele, ale ježto $\omega < \alpha$, neprotíná rovina plochu kuželovou ve dvou povrchových přímkách reálných.

* * *

Protneme-li válec elliptický rovinou normálnou, jest obsah řezu normálného $S = Z \sin \alpha$,] při čemž je Z obsah základny, $\alpha$ odchylka přímek povrchových od základny. Aby řez normálný byl kruhový, musí

$$\pi r^2 = \pi a b \sin \alpha ,$$

kdež značí $r$ poloměr kruhu, $a$, $b$ poloosy ellipsy;

ježto
$$r = a \sin \alpha$$
a
$$b = r ,$$
jest
$$b^2 = a b \sin \alpha$$
nebo
$$\sin \alpha = \frac{b}{a} .$$

Rovnice tato určuje odchylku přímek povrchových od základny elliptické.

$$\text{Je-li} \quad \alpha = \begin{Bmatrix} 90^0 \\ 30^0 \\ 45^0 \\ 60^0 \end{Bmatrix}, \quad \text{jest} \quad \begin{Bmatrix} a = b \quad \text{(základna kruhová)} \\ a = 2b \\ a = b\sqrt{2} \\ a = \frac{2}{3} b\sqrt{3} \end{Bmatrix}.$$

*Poznámka redakční.*

V Strnadově Geometrii pro vyšší reálky (2. vyd. str. 320.) vyvozena jest rovnice kuželosečky, v níž rovina protíná rotační plochu kuželovou. Přidržíme-li se označení užitého v článku prof. Hübnera, jest rovnice ta

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

kdež

$$p = m \operatorname{ctg} \alpha \sin (\alpha + \omega)$$

$$q = - \frac{\sin (\alpha + \omega) \sin (\alpha - \omega)}{\sin^2 \alpha} .$$

Jelikož

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad q = - \frac{b^2}{a^2},$$

jest

$$a = -\frac{p}{q} = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \omega)},$$

$$b = p\sqrt{-\frac{1}{q}} = m \cos\alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}};$$

poslední dva výrazy jsou základem ostatních úvah v článku předcházejícím.

---

# Stanovení odchylky stěn těles pravidelných v jeden vrchol se sbíhajících od roviny, která prochází koncovými body hran v témže vrcholu se protínajících.

Podává

**Václav Hübner,**
professor na Král. Vinohradech.

## I.

### Pravidelný čtyrstěn.

Řešení: Odchylka tato $\alpha$ určí se z rovnice

$$p_1 = p \cos\alpha,$$

ve kteréž značí $p_1$ průmět pláště $p$ na stěnu čtyrstěnu (základnu pravidelného jehlanu trojbokého) a z toho

$$\cos\alpha = \frac{p_1}{p}.$$

Dále jest $p = 3p_1$, pročež

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Z toho vidno, že odchylka $\alpha$ (zároveň stěnový úhel pravidelného čtyrstěnu) jest tak veliká, jako odchylka stěn pobočných