Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Goniometrické řešení rovnic kvadratických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 2, 209--213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123292

„Myšlenka, veškeré hodnoty vyjádřiti devíti znaky, jimž se proto dá hodnota místní, jest tak jednoduchá, že právě z té příčiny neuznává se s důstatek, jakého zaslouží obdivu. Právě ona jednoduchost a snadnost, kterou tato methoda poskytuje počítání, povznáší arithmetický system Indů mezi nejužitečnější objevy. Jak obtížno však bylo vynalézti takovouto methodu, lze z toho souditi, že minula genia Archimedova a Apollonia z Pergy, dvou největších duchů starověku.“

(Dokončení.)

Goniometrické řešení rovnic kvadratických.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot,**

professor v Plzni.

V následující úvaze uvedeme zvláštní postup při řešení rovnic kvadratických, který spočívá na vlastnostech kořenů rovnice kvadratické; postup ten úzce souvisí s jistou úlohou geometrickou a jednoduché řešení této úlohy podává jinou methodu, na základě které okamžitě goniometricky může býti rovnice kvadratická řešena.

I. Je-li dána kvadratická rovnice

$$x^2 + px + q = 0,$$

rozeznávejme dva případy; předně, je-li q negativní a za druhé positivní číslo, při čemž p značiti může libovolné číslo reálné.

Je-li tedy v případě prvém rovnice tvaru

$$x^2 + px - q = 0,$$

při čemž ovšem q značí číslo positivní, pak můžeme hned k řešení dospěti, uvážíme-li, že libovolné číslo q možno psáti ve tvaru $\sqrt{q} \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi$.

Jsou-li x_1 a x_2 kořeny rovnice kvadratické, možno položiti

$$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi,$$
$$x_2 = -\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

a podmínka

$$x_1 x_2 = -q$$

jest vyplněna.

K určení úhlu φ máme pak podmínku

$$x_1 + x_2 = -p = \sqrt{q}\,(\mathrm{ctg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi) = \sqrt{q}\,\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$$
$$= 2\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,2\varphi,$$

t. j.

$$\mathrm{ctg}\,2\varphi = -\frac{p}{2\sqrt{q}},$$

čímž rovnice goniometricky řešena.

V případě druhém jest tvar kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0,$$

při čemž q značí ovšem číslo positivní.

Možno opět položiti

$$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi,$$
$$x_2 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

neboť pak jest vyplněna podmínka

$$x_1 x_2 = q.$$

Úhel φ jest pak určiti z rovnice

$$x_1 + x_2 = -p = \sqrt{q}\,\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{2\sqrt{q}}{\sin 2\varphi},$$

z níž plyne

$$\sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Je-li $\frac{4q}{p^2} \leqq 1$, pak jest úhel φ reálný a rovnice má reálné kořeny.

Je-li však $\frac{4q}{p^2} > 1$, jsou kořeny komplexní čísla.

V případě tomto dospějeme snadno k jich určení, uvážíme-li, že číslo q možno psáti ve tvaru

$$q = q(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \sqrt{q}(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sqrt{q}.$$

Položíme-li pak

$$x_1 = \sqrt{q}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$x_2 = \sqrt{q}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

jest vyplněna podmínka

$$x_1 x_2 = q.$$

Úhel φ jest určiti z rovnice

$$x_1 + x_2 = -p = 2\sqrt{q}\cos\varphi,$$

z níž plyne

$$\cos\varphi = -\frac{p}{2\sqrt{q}}.$$

Poněvadž $\frac{p^2}{4q} < 1$, jest úhel φ reálný, čímž rovnice i v tomto případě jest řešena.

II. Podejme ještě jedno geometrické řešení předložené úlohy a sice pro ten případ, že kořeny rovnice jsou reálné; řešení to spočívá opět na vlastnostech kořenů rovnice kvadratické.

V kvadratické rovnici můžeme koëfficient při neznámé, t. j. v našem případě veličinu p klásti negativní; je-li totiž p positivní, pak jsou kořeny opačného označení. Pišme proto kvadratickou rovnici ve formě

$$x^2 - px + q = 0,$$

při čemž p značí číslo positivní.

Rozeznávejme opět dva případy a sice, je-li q positivní a případ druhý, je-li q negativní.

V případě prvém jest tedy tvar kvadratické rovnice

$$x^2 - px + q = 0.$$

Řešení této rovnice možno geometricky takto formulovati: Jest dána přepona p pravoúhlého trojúhelníka a výška $\sqrt{q}$

patřící této přeponě; jest ustanoviti úseky, jež výška tato na přeponě tvoří.

Narýsujme pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě $\overline{AB}=p$ a výšce $\overline{CD}=\sqrt{q}$ a označme půlící bod přepony O.

Je-li úhel při B roven φ, pak jest $\sphericalangle AOC=2\varphi$.

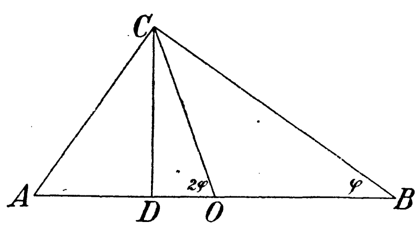
Z obrazce plyne

$$\sin 2\varphi=\frac{\sqrt{q}}{\frac{p}{2}}=\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Úseky $\overline{AD}=x_2$ a $\overline{DB}=x_1$ ustanovíme též hned z obrazce neboť

$$x_1=\sqrt{q}\operatorname{ctg}\varphi,$$
$$x_2=\sqrt{q}\operatorname{tg}\varphi,$$

čímž kvadratická rovnice jest řešena.



Je-li v případě druhém konstantní člen negativní, takže rovnice má tvar

$$x^2-px-q=0,$$

pak, ježto p jest positivním, jest kořen o větší absolutní hodnotě positivním; kořen ten označme x_1; kořen druhý jest negativní a proto označme ho $-x_2$; x_2 značí pak číslo positivní.

Řešení předložené rovnice můžeme pak geometricky takto vyjádřiti:

Jest dán rozdíl p úseků, které tvoří výška pravoúhlého trojúhelníka na přeponě, jakož i výška $\sqrt{q}$, patřící k této přeponě; jest určiti úseky x_1 a x_2.

Z obrazce hořejšího plyne

$$\overline{DO} = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Značí-li nyní v témž obrazci p rozdíl úseků $x_1 - x_2$, pak jest

$$\overline{DO} = \frac{p}{2}$$

a

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}},$$

jakž z obrazce přímo patrno; z téhož obrazce plyne

$$x_1 = \sqrt{q} \operatorname{ctg} \varphi,$$
$$x_2 = \sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi.$$

Druhý kořen $-x_2$ jest tedy roven

$$-x_2 = -\sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi,$$

čímž i v tomto případě rovnice okamžitě řešena.

Této geometrické methody možno i snadno užíti ku grafickému řešení rovnic kvadratických.

O stanovení pláště kužele rotačního šikmo sříznutého.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot,**

professor v Plzni.

V posledním čísle předešlého ročníku tohoto Časopisu v článku o stanovení povrchu šikmo sříznutého rotačního kužele byl v poznámce redakční stanoven velmi jednoduchý vzorec pro plášť.

Myslím, že nebude od místa, vyvineme-li tentýž vzorec úvahou naprosto jinou a velmi jednoduchou.

Nechť jsou $\overline{va} = m$, $\overline{vb} = n$ nejkratší a nejdelší strany sříznutého kužele.

Odchylka stran od základny budiž α.