Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Stanovení odchylky stěn těles pravidelných v jeden vrchol se sbíhajících od roviny, která prochází koncovými body hran v témže vrcholu se protínajících

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 2, 221--226

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123290`

$$a = -\frac{p}{q} = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \omega)},$$

$$b = p\sqrt{-\frac{1}{q}} = m \cos\alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}};$$

poslední dva výrazy jsou základem ostatních úvah v článku předcházejícím.

Stanovení odchylky stěn těles pravidelných v jeden vrchol se sbíhajících od roviny, která prochází koncovými body hran v témže vrcholu se protínajících.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

I.

Pravidelný čtyrstěn.

Řešení: Odchylka tato α určí se z rovnice

$$p_1 = p \cos\alpha,$$

ve kteréž značí p_1 průmět pláště p na stěnu čtyrstěnu (základnu pravidelného jehlanu trojbokého) a z toho

$$\cos\alpha = \frac{p_1}{p}.$$

Dále jest $p = 3p_1$, pročež

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Z toho vidno, že odchylka α (zároveň stěnový úhel pravidelného čtyrstěnu) jest tak veliká, jako odchylka stěn pobočných jakéhokoliv jehlanu pravidelného, v němž plášť $=$ 3-násobné ploše základny.

II.

Pravidelný osmistěn.

Řešení: Pravidelný osmistěn skládá se ze dvou shodných pravidelných jehlanů čtyrbokých. Odchylka pobočných stěn α od čtvercové základny, která se rovná též polovině stěnového úhlu ω osmistěnu, dána jest opět rovnicí

$$\cos\alpha = \cos\frac{\omega}{2} = \frac{p_1}{p}$$

a ježto $p_1 = s^2$, $p = 4 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ (s značí délku hrany osmistěnu), jest

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

a $$\cos\omega = 2\cos^2\frac{\omega}{2} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3},$$

z čehož poznáváme, že stěnový úhel v pravidelném čtyrstěnu a v pravidelném osmistěnu jsou *úhly výplňkové.* (Stěnový úhel v pravidelném čtyrstěnu $\omega_4 = 70^0 31' 44''$, stěnový úhel v pravidelném osmistěnu $\omega_8 = 109^0 28' 16''$; $\omega_4 + \omega_8 = 180^0$).

III.

Krychle.

Řešení: Při každém vrcholu vzniká pravidelný jehlan trojboký. Základna jest trojúhelník rovnostranný o straně $s\sqrt{2}$, a plášť složen jest ze tří trojúhelníků pravoúhlých a rovnoramenných o odvěsně s, při čemž s značí délku hrany krychle. Jest tudíž odchylka stěny od základny dána rovnicí

$$\cos\alpha = \frac{p_1}{p} = \frac{\frac{(s\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3}}{3\frac{s^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Svírají tudíž stěny krychle s rovinou určenou 3 koncovými body hran sbíhajících se v jeden vrchol úhel, který se rovná polovině úhlu stěnového v pravidelném osmistěnu nebo stěnovému úhlu v pravidelném čtyrstěnu.

IV.

Pravidelný dvanáctistěn.

Řešení: Při každém vrcholu vzniká pravidelný jehlan trojboký. Základna jest trojúhelník rovnostranný, jehož strana rovná se úhlopříčně pravidelného pětiúhelníka o straně s (délka hrany dvanáctistěnu), a plášť jeho jest složen ze tří trojúhelníků rovnoramenných, jichž ramena mají délku s a svírají spolu úhel 108^0.

Jest tedy

$$\cos\alpha = \frac{p_1}{p} = \frac{\frac{u^2}{4}\sqrt{3}}{3\frac{s^2}{2}\sin 108^0};$$

jelikož

$$\frac{u}{2} = s\sin 54^0, \quad \sin 108^0 = 2\sin 54^0 \cos 54^0,$$

jest

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{tg}\,54^0 = \mathrm{ctg}\,60^0\,\mathrm{tg}\,54^0.$$

Úhel stěnový ω v pravidelném dvanáctistěnu dán jest rovnicí

$$\cos\omega = \mathrm{ctg}\,108^0 . \mathrm{tg}\,54^0,$$

pročež

$$\cos\alpha : \cos\omega = \mathrm{ctg}\,60^0 : \mathrm{ctg}\,108^0 .$$

V.

Pravidelný dvacetistěn.

Řešení: Při vrcholech vzniká pravidelný jehlan pětiboký. Základna jest pravidelný pětiúhelník o straně s (délka hrany dvacetistěnu) a plášť skládá se z pěti rovnostranných trojúhelníků o straně s.

Proto jest

$$\cos\alpha = \frac{p_1}{p} = \frac{5\frac{s^2}{4}\operatorname{ctg} 36^0}{5\frac{s^2}{4}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg} 36^0,$$

nebo

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} 54^0.$$

Svírají tudíž stěny u pravidelného dvanáctistěnu i dvacetistěnu s rovinou určenou koncovými body hran v jeden vrchol se sbíhajících *stejné úhly* ($37^0 22' 35''$).

Úhel stěnový ω v pravidelném dvacetistěnu stanoven jest rovnicí

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\cos 36^0}{\sin 60^0}$$

čili

$$\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2} = 1 - 2\,\frac{\frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2}{\frac{3}{4}},$$

pročež

$$\cos\omega = -\frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

Připomenutí. 1. Je-li ω_8 úhel stěnový v pravidelném osmistěnu, ω_{20} úhel stěnový v pravidelném dvacetistěnu, plyne z předešlých výpočtů

$$\sin^2\omega_{20} = 1 - \cos^2\omega_{20} = \frac{4}{9},$$

$$\sin^2\omega_8 = 1 - \cos^2\omega_8 = \frac{8}{9}$$

nebo

$$\sin^2\omega_{20} = \frac{1}{2}\sin^2\omega_8 .$$

2. Podobně jest z odst. IV. $\cos^2\omega_{12} = \operatorname{ctg}^2 72^0 \operatorname{tg}^2 54^0$. Dosadíme-li za

$$\operatorname{tg}^2 54^0 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{ctg}^2 72^0 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5},$$

obdržíme

$$\cos^2\omega_{12} = \frac{1}{5};$$

a ježto z odst. V. jest

$$\cos^2\omega_{20} = \frac{5}{9},$$

pročež

$$9\cos^2\omega_{12}\cos^2\omega_{20} = 1$$

nebo

$$\cos\omega_{12}\cos\omega_{20} = \cos\omega_4 ,$$

(ω_4 úhel stěnový v pravidelném čtyrstěnu).

3. Ježto

$$\cos^2\alpha_{20} = \cos^2\alpha_{12} = \frac{1}{3}\,\frac{5+2\sqrt{5}}{5},$$

jest

$$5\cos^2\alpha_{20} = 3\cos^2\omega_{20} - 2\cos\omega_{20},$$

dosadíme-li za

$$\sqrt{5} = -3\cos\omega_{20} .$$

Význam veličin α_{12}, α_{20} jest patrný.

Poznámka redakční.

Úlohu v článku tomto pro jednotlivé pravidelné mnohostěny řešenou lze obecně řešiti takto:

Je-li 2β hranový úhel při temeni pravidelného jehlanu, 2γ středový úhel jeho základny, jest odchylka α pobočných stěn od základny vyjádřena dle pravidla Neperova sférické trigonometrie vzorcem

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Jsou-li pak stěny pravidelného mnohostěnu n-stranné a rohy jeho m-hranné, jest

$$\beta = \frac{(n-2)\,R}{n}, \qquad \gamma = \frac{2R}{m},$$

pročež

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{2R}{n} \,.\, \operatorname{ctg}\frac{2R}{m}.$$

Pro úhel ω dvou sousedních stěn mnohostěnu pravidelného jest dle téhož pravidla

$$\sin\frac{\omega}{2} = \cos\frac{2R}{m} : \sin\frac{2R}{n}$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \sin\frac{2R}{m} \,.\, \sin\alpha.$$

(Viz: Strnad, Geometrie pro vyšší reálky, 2. vyd. str. 237.)

O novém sestrojování os ellipsy ze sdružených průměrů aneb za podobných podmínek.

Napsal

inženýr **Bohumil Chalupníček,**

supplent při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

Náš výtečný, však bohužel nedávno zemřelý dv. r. prof. Ed. Weyr uvádí ve své pěkné knize „Projektivná geometrie základných útvarů prvého řádu“ na str. 147. v levo zobecněnou větu Desargues-ovu v tomto znění:

„Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, vedenou dvěma základnými body svazku mimo tyto body ještě ve dvou bodech, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce;