Antonín Sucharda

Důkaz a několik poznámek ku jisté větě Bertrandově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 49--52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123281`

Důkaz a několik poznámek ku jisté větě Bertrandově.

Napsal

Ant. Sucharda,

professor v Táboře.

V druhé Zprávě jednoty českých mathematiků (pag. 82.) uvádí prof. Dr. Em. Weyr, užívaje počtu differenciálného, jednoduchý důkaz věty, již Bertrand ve svém „Traité de calcul différentiel“ uveřejnil bez důkazu.

Věta tato zní: Dvě křivky C a Γ jsou v téže rovině. Spojíme-li takové jejich body, jichž tečny jsou stejnosměrny (rovnoběžny), a proložíme-li pevným bodem roviny délky s oněmi přímkami spojivými stejné a stejnosměrné, vyplní konečný bod těchto délek novou křivku V, jejíž oblouk rovná se buď součtu nebo rozdílu příslušných oblouků křivek původních.

Účelem řádků těchto jest podati jiný jednoduchý důkaz této věty s obejitím počtu differencialného a přičiniti některé poznámky, jež ku plochám různosměrek (plochám rozvinutelným) prohlédají.

Především jest nápadno, proč někdy oblouk výsledný součtu, jindy rozdílu oblouků křivek daných se rovná, a kdy ten , kdy onen případ nastává.

Pátrajíce po této příčině, záhy poznáme, že tu rozhoduje smysl, jakým po sobě jdou k sobě příslušné body jedné a druhé z křivek daných. Myslíme-li si totiž sečnu obou těchto křivek, určenou dvěma k sobě příslušnými body a sledujeme-li pořad bodů k sobě náležejících v jedné i druhé křivce, od této sečny počínajíce, shledáme, že buďto body pokračují v obou křivkách od sečny po téže její straně, nebo ale po stranách různých.

Není nesnaduo poznati, že v případech prvního druhu oblouk nové křivky se rovná rozdílu, ve případech druhu druhého součtu příslušných oblouků křivek původních.

Abychom toho dokázali, mějme na mysli nekonečně malý oblouk $\overline{a{}^1a}$ křivky C a jemu příslušný $\overline{\alpha^1\alpha}$ křivky Γ.

Oblouky ty lze míti za přímky a o těch zjevno z podmínky, v úloze obsažené, že jsou spolu stejnosměrny.

Přímými úseky $\overline{a\alpha}$ $\overline{{}^1a^1\alpha}$ doplňují se tyto dva nekonečně krátké oblouky na lichoběžník.

Myslíme-li si libovolným bodem s v rovině obou křivek k ramenům $\overline{a\alpha}$ $\overline{{}^1a^1\alpha}$ tohoto lichoběžníka stejnosměrky s nimi stejně dlouhé $\overline{sv}$, $\overline{s^1v}$, vznikne trojúhelník, jehož strana $\overline{v^1v}$ patrně je prvkem hledané křivky V.

Jestliže smysl od a ku ${}^1a$ byl souhlasný se smyslem od α ku ${}^1\alpha$, vznikne lichoběžník řádu prvního, t. j. takový, jehož ramena se neprotínají. Tu pak nutně $\overline{v^1v} = \overline{a^1a} - \overline{\alpha{}^1\alpha}$, t. j. nekonečně malý oblouk křivky nové rovná se rozdílu příslušných nekonečně malých oblouků křivek původních.

Jestliže však smysl od a ku ${}^1a$ byl protivným smyslu od α ku ${}^1\alpha$, vznikne lichoběžník řádu druhého, t. j. takový, jehož ramena spolu se pronikají. Tuť pak délka

$$\overline{v^1v} = \overline{a^1a} + \overline{\alpha^1\alpha},$$

t. j. nekonečně malý oblouk křivky nové rovná se součtu příslušných nekonečně malých oblouků křivek původních.

Co tu dokázáno o obloucích nekonečně malých, platí patrně i o jakýchkoli jejich součtech, děje-li se jen sčítání v mezích, v nichž smysl, jakým body po sobě následují, zůstává ve své křivce nezměněn. Tím pak věta jest dokázána.

Budiž dovoleno učiniti nyní ještě některé úvahy, především tuto:

Při daných křivkách C, Γ bude hledaná křivka V obecně se skládati z několika částí pro sebe oddělených, jež označeny buďtež V_1 V_2 . . . V_n.

Vytkneme-li totiž v křivce C libovoný bod a, jehož tečnou je Ta, jako počáteční, lze k němu přidružiti ne pouze bod α křivky Γ, nýbrž kterýkoli z ν bodů α β γ . . . křivky této, jež mají tečny s Ta stejnosměrné. Podobně též ku bodu α nejen bod a, nýbrž kterýkoli z μ bodů a b c . . . křivky C, jež s ním mají stejnosměrné tečny. Při tom ovšem ν znamená třídu křivky Γ, μ pak třídu křivky C.

Počnouce nyní v křivce C bodem a, v křivce Γ bodem α, pokračujme v obou tak, aby podmínkám v úloze vysloveným bylo vyhověno. I nabudeme výsledné křivky V_1, která však není úplným řešením naší úlohy. Shledámeť, že mezi dvojicemi bodů k sobě příslušných, jak jsme je postupem v obou křivkách obdrželi, mimo dvojici $a\ \alpha$ obecně jen některé z dvojic $a\beta$ $a\gamma$ . . .; βa, βb . . . též se vyskytnou, kdežto ostatní neužity zbudou.

Jsme tudíž nuceni práci opakovati, počnouce tentokráte některou jinou z dvojic, jež z řad právě vypsaných zbyly. Tak obdržíme křivku V_2, další to část hledaného řešení. Teprve vyčerpáním všech dvojic nabýváme křivky výsledné, která patrně tedy z právě tolika oddělených křivek se skládá.

Jsou-li křivky C, Γ takové formy, že poloměr křivosti v každé z nich má jediné znaménko, zůstane pro jednu zvolenou dvojici bodovou smysl pohybu jednou zaujatý od začátku až do konce v té které křivce týž.

Proto budou některé z křivek V_n veskrze míti oblouky rovné součtům, některé pak rovné rozdílům příslušných oblouků křivek daných. Tato vlastnosť ovšem bude i pro celé obvody, takže obvody jedny budou rovny součtům, druhé rozdílům obvodů křivek C a Γ.

Mění-li se však v jedné neb v obou daných křivkách znaménko křivosti, tuť, procházejíce prvou z nich v jednom smyslu, budeme nuceni v křivce druhé smysl zaujatý časem měniti v opačný, tedy se vraceti. V takových případech žádná z vytvořených křivek V_n nebude míti oblouky veskrze stejného druhu, nýbrž každá bude se skládati na díle z takových oblouků jež rovnají se součtu, na díle z takových, jež rovnají se rozdílu příslušných oblouků křivek původních.

S okolností tou souviseti budou zvláštnosti tvaru výsledné křivky.

Na závěrek stůj zde ještě úvaha následující:

Mysleme si, že by dané křivky C, Γ na místě v rovině jedné byly ve dvou rovinách stejnosměrných.

Tuť přímky $\overline{a\alpha}$, $\overline{{}^1a^1\alpha}$ a. t. d., procházející dotyčnými body tečen stejnosměrných, jsou površkami plochy různosměrek, těmi křivkami určené. Dále mysleme si bod s v rovině jedné z těchto křivek, třeba Γ. Myslíme-li si jím stejnosměrky ku všem površkám, vznikne řídící plocha kuželová té plochy různosměrek. Body, v nichž površky její pronikají rovinu křivky C, určuje se stopa té plochy kuželové v rovině této. Délky površek mezi středem a touto stopou rovnají se úsekům příslušných površek plochy různosměrek, obsaženým mezi rovinami obou křivek — jsouť stejnosměrky mezi stejnosměrnými rovinami si rovny. Poněvadž pak i orthogonálné průměty stejnosměrných a stejných úseků jsou stejnosměrné i stejně dlouhé, průměty tečen pak jsou tečnami průmětu a průměty přímek s průmětnou stejnosměrných jsou s promítanými přímkami stejnosměrny: seznáme, že stopa řídící plochy kuželové v rovině křivky C nic jiného není než křivka V věty z počátku uvedené; na místo křivky Γ nastupuje tu její s ní shodný a homothetický průmět orthogonálný do roviny křivky C.

Z věty prve pro dvě křivky v jedné rovině vyslovené vyplývá tedy věta, týkající se ploch různosměrek (ploch rozvinutelných), určených dvěma křivkami v stejnosměrných rovinách:

„Má-li řídící plocha kuželová plochy různosměrek střed svůj v rovině jedné křivky řídící, proniká ji rovina řídící křivky druhé v křivce, jejíž oblouk se rovná součtu nebo rozdílu příslušných oblouků křivek řídících.“

Není-li střed kuželové plochy v rovině žádné z těchto křivek, týká se věta dokázaná oné křivky, v níž tuto plochu proniká rovina, jejíž vzdálenosť od středu rovná se vzájemné vzdálenosti rovin křivek řídících, a jež s těmi rovinami jest stejnosměrna.

Prohlédajíce ku křivkám V_1, V_2 . . . , z nichž, jak jsme ukázali, křivka V se skládá, shledáváme, že řídící kuželová plocha uvažované plochy různosměrek obecně záleží z několika pláštův oddělených. Každý z nich korresponduje s jednou z křivek V a spolu s jedním pláštěm plochy různosměrek, z nichž tato plocha obecně se skládá.

Tyto pláště, v křivkách řídících se pronikajíce, činí je násobnými.