Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Quido Vetter

Egyptské zlomky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 169--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123274

circulaires ou elliptiques, ou, plus généralement, planes, ne sont pas, pour des raisons de statique, possibles. Les noyaux ne peuvent pas etre situés dans les plans des électrons, qui doivent, selon Born, faire un angle de 60°. Il est vraisemblable que les noyaux oscillent autour de certaines positions d'équilibre.

On pourrait, en combinant le modèle de Born pour la molécule de l'hydrogène avec celui de Bohr pour l'atome de l'hélium, et en faisant l'inversion, aboutir à un nouveau modèle du noyau de l'hélium ayant la forme schématique que voici:

Autour de l'électron comme centre, les deux noyaux d'hydrogène décrivent, chacune, à peu près un cercle, les plans de ces deux cercles faisant un angle de 120°; sous ce système se trouve un second système de la même structure, parfaitement semblable et homothétique au premier, tandis que la droite des deux électrons est l'axe de ce nouveau système, de sorte que cette figure possède un degré considérable de symétrie.

Egyptské zlomky.

Napsal *Q. Vetter.*

V zachovaných egyptských památkách počítá se výlučně s kmennými zlomky, to jest se zlomky o čitateli 1. Výjimku tu tvoří jen zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$, ba dokonce i $\frac{5}{6}$. Než znaky pro $\frac{5}{6}$ a $\frac{3}{4}$ brzy zanikly, takže se udržel jen znak pro $\frac{2}{3}$, jak vidíme také ve známém papyru Ahmesově. Užívání kmenných zlomků, jak ukazuje Sethe,[1]) nebylo omezeno jen na Egypťany, avšak u nich bylo vybudováno v obdivuhodný systém, jak jej nikde jinde nenalézáme. $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$ byly podle Setheho[2]) zlomky „komplementární“, které se na rozdíl od kmenných zlomků nečtly na základě jmenovatele nýbrž čitatele „2 díly“ a „3 díly“ totiž ze 3 a 4. Tato úsloví nelze však pokládati za naše obyčejné zlomky s čitatelem větším než 1, nýbrž jen za jakýsi náběh, který se spíše blíží pojmu pomocné jednotky, kde se kmenový zlomek $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ považuje za novou jednotku, jakýsi nový celek. Podle F. Hultsche[3]) považovali Egypťané $\frac{2}{3}$ za rovnocenné kmenným zlomkům a byli si při tom úplně vědomi, že to jest vlastně zkratka pro $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$.

Sethe[4]) správně podotýká, že nechápeme, jak mohli Egypťané používati tak těžkopádného aparátu, jakým jest počítání se zlomky

[1]) *K. Sethe*: „Von Zahlen und Zahlwörtern bei den alten Aegyptern . . .“ Strassburg 1916, 62 nn.

[2]) L. c., 91 nn.

[3]) *F. Hultsch:* „Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung“, Abh. d. phil.-hist. Cl. d. sächsischen Ges. d. Wissensch. XVII (1897) No. 1., 30 nn.

[4]) L. c., 60 nn.

kmennými, ač jejich myšlénka pomocné jednotky a způsob řešení úloh svědčí o matematické vyspělosti. Proto se mi zdá nedostatečným důvod, který se někdy uvádí, že nedovedli obyčejný zlomek napsati, ba, že ani neměli proň slovného vyjádření. Kdyby byli pocítili potřebu zlomků těch, byli by si zajisté dovedli vymysliti nějaký způsob označování jak slovného, tak grafického.

V literatuře se začasté setkáváme s názorem, že učenci egyptští při své vyspělosti znali obyčejné zlomky a že jich užívali ke svým výpočtům, že se však ve spisech přidržovali kmenných zlomků, které byly v lidu vžity. Leč tu si pomáháme z nouze předpokládaným tajnůstkářstvím, které nelze ze zachovaných památek doložiti. Sethe[5]) ukazuje, že ve starohebrejštině a ve Starém Zákoně kromě zlomků komplementárních se vyskytují jen zlomky kmenné. Tyto nalézáme také výlučně nejen v řeckých papyrech egyptského původu, nýbrž i v attických nápisech. Soudí proto Sethe, že užívání jich bylo u národů, s nimiž se Egypťané kulturně stýkali, výlučně rozšířeno mezi lidem.

Jest přirozeno, že láká otázka po psychologickém důvodu. Nejstarším dělením jest zajisté půlení. Není jistě náhodou, že se až do renesance udržela dvojnásobování a půlení jako zvláštní početní výkony. Jak vžito bylo půlení, to vidíme v knize Ahmesově. Také egyptské dělení míry polní a obilní jest založeno na binární soustavě. Značky pro $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$ nejsou vzaty ze soustavy zlomků kmenných, které se píší jmenovatelem nad nímž jest učiněna značka ⬭, v hieratickém písmě zkrácená na tečku, nýbrž značkou pro paži a ležatým křížkem. Z toho usuzuje Sethe, že jsou původu staršího, než nauka o zlomcích kmenných. Z téhož důvodu se domnívá, že také dělení třemi jest staršího původu, neboť pro $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ jsou v hieratickém písmě zvláštní, s kmennými zlomky nesouvisející značky. Dělení měr plošných a zvláště obilních (beša) jest také zcela samostatné, jsouc označováno odlišně od soustavy číslic. Lze se tedy domívati, že se vytvořilo samostatně a jest přirozeno, že asi předcházelo nauku o kmenných zlomcích. Eisenlohr, vydavatel, překladatel a komentátor knihy Ahmesovy,[6]) se domnívá, že Ahmes používá zvláštních značek pro $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ a $\frac{1}{8}$ beša. Přihlédneme-li však blíže, vidíme, že to jsou vlastně ligatury z $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ atd., ba že to jsou někdy jen tyto značky psané prostě pod sebou. Jest to přirozené a jest také zcela možno, že Egypťané mohli použíti nádob, jichž obsah se rovnal tomuto součtu beša. Tato okolnost však nedokazuje, že by byli Egypťané součet těchto zlomků spojovali v jednotný pojem, jak jej nalézáme v našem obyčejném zlomku.

Lze tu poukázati na okolnost dosud v literatuře nepovšimnutou. Egypťané dělili obilní míru beša na 320 *ro*. Sethe správně podotýká,

---

[5]) L. c., 62 nn.

[6]) *A. Eisenlohr:* „Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter“, Lipsko (1877), 2. vyd. textu (1891).

že $\frac{1}{32}$ byla rozdělena na 10 nových dílů, že tedy opuštěno dělení binární a sáhnuto, patrně v době mnohem pozdější, k dělení dekadickému. Byla tudíž poslední částka beša, $\frac{1}{64}$, rovna 5 *ro*. Ahmes vždy důsledně vypočítává své početní výsledky, jsou-li v příkladech vyjádřeny v *ro*, na celou stupnici částí beša a teprve zbytky, menší než 5 *ro* na tuto Jednotku. Důsledný příklad na počítání těmito částmi beše lze shledati také ve výpočtech, které nalezl v dubnu 1891 prof. Brugsch na sádrou potažených destičkách v museu v Gizeh,[7]) které podle seznamu jmen na nich uvedených pocházejí z doby, XI. a XII. dynaste (? — 1996/3, 1996/3 – 1788 př. Kr.), tedy z doby, z níž pocházejí i staré předlohy Ahmesova spisu.

Brugsch na nich zjistil tyto výpočty:

1	$\frac{1}{3}$			
2	$\frac{2}{3}$			
4	$1\frac{1}{3}$			
5	$1\frac{2}{3}$			
10	$3\frac{1}{3}$			
20	5	$1\frac{2}{8}$		
40	10	$3\frac{1}{3}$		
80	20	5	$1\frac{2}{3}$	
160	40	10	$3\frac{1}{3}$	
320	80	20	5	$1\frac{2}{3}$

7	1						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$						
1	40	$5\frac{1}{2}$					
2	80	10	1				
4	160	20	2				
1	11						
10	110						
20	220						
2	22						
4	44						
8	88						
11	1						
1	20	5	4	$\frac{1}{11}$			
2	40	10	5	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{66}$	
4	80	20	10	5	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{33}$
8	160	40	20	10	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{22}$ $\frac{1}{66}$

1	10				
10	100				
20	200				
2	20				
1	20	10	2		
2	40	20	4		
4	80	40	5	3	
8	160	80	10	5	1

a podobně 1 . . . . . 13 atd.

Brugsch se domnívá, že v každé skupině jde o číslo určitého poměru. Srovnáme-li však tyto výpočty se spisem Ahmesovým a uvážíme-li, že jsou psány v nepořádku, s častým opakováním, tu se zdá, že to jsou vedlejší výpočty a to násobení. Levý sloupec udává násobitele, pravý součiny, jen ve třetím a čtvrtém příkladě v prvé části (prvé 4 a 6 řádek) jsou oba sloupce zaměněny. V prvém

[7]) *H. Brugsch-Pascha:* „Aus dem Morgenlande." Leipzig. Reclambibl. č. 3151 a 3152 str. 25 nn.

příkladě se násobí $\frac{1}{3}$ *ro*, neboť se 5 *ro* $= \frac{1}{64}$ beša v řádku 6., 8. a 10 neslučuje s následující jednotkou v jediné číslo 6. Ve druhém příkladě položeno jest 1 beša rovno 7 dílům, což upomíná na počet s pomocnými jednotkami. V 5. řádku se zase neslučuje 80 *ro* $= \frac{1}{4}$ beša s 10 *ro* $= \frac{1}{32}$ beša a v 6. řádku 160 *ro* $= \frac{1}{2}$ beša s 20 *ro* $= \frac{1}{16}$ beša. Zde jest výpočet jen přibližný, neboť ve 4. řádku bylo vypuštěno $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{14}$ *ro* a v dalších příslušné násobky. V následujících dvou výpočtech jde zase o 1 beša, položené ve třetím příkladě rovno 10 ve čtvrtém 11 dílům.

V tomto přepočítání na části beša vidím snahu, důsledně používati celé uspořádané stupnice jednotek přes nebezpečí těžkopádnosti nebo i nepřehlednosti, jak vidíme také na uspořádání kmenných zlomků podle velikosti, byť i početní odvození vyžadovalo jiného uspořádání. A na základě této snahy lze kmenné zlomky vysvětliti touto hypotésou:

Egypťané nejdříve získávali zlomky dělíce jednotku několikráte 2ma až 3mi. Když později dělením také jinými čísly získávali stupnici jednotek lomených, tu snaha po uspořádané stupnici vedla mimoděk k pravidlu, neklásti vedle sebe dvě stejné jednotky, nýbrž použíti vyskytnuvší se možnosti a vytvářeti klesající řady zlomků, a to pokud možno stejnoměrně klesající, jak o tom svědčí na př. Ahmesova tabulka dělení 2 lichými čísly. Při tomto vývoji nebyla asi ještě jedna okolnost bezvýznamnou. Při násobení a dělení vidíme, že se Egypťané blížili žádanému výsledku postupně. Vyjádřil-li Egypťan určitou lomenou veličinu klesající řadou kmenných zlomků, tu měl hned řadu sblížených hodnot, čím dál tím přesnějších. Zdá se, že si toho také byl vědom, neboť vidíme nejednou, že poslední zlomky vynechává zvláště tam, kde pro praktický smysl úlohy nemají již takového významu a kde by se jimi počet příliš komplikoval. Poukazuji tu jen na př. na č. 42 ve spise Ahmesově, počítající objem kulatého špýcharu. Přesný výsledek byl by býval 1185 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{54}$ krychlového lokte a do špýcharu by se vešlo 59 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{108}$ míry obilí. Ahmes zarovnal tato čísla na 1185 a 59$\frac{1}{4}$. Toho Eisenlohr, jak se zdá, nepochopil, neboť ve svém překladě doplňuje scházející zlomky, jakoby se Ahmes byl dopustil chyby.

Kmenné zlomky byly novými jednotkami, pro něž bylo třeba vytvořiti početní pravidla. Při tom bylo zřejmě nutno, založit výpočet vždy na tom, co tu bylo, tedy nikoliv na pojmu jmenovatel a čítatel, jenž pro Egypťany vůbec neexistoval, nýbrž jen na pojmu reciproké hodnoty určité veličiny. Empiricky mohli snadno dojíti k poznatku, že znásobíme-li číslici této veličiny, tu se dělí reciproká hodnota sama, touto číslicí a značkou ⌓ psaná, a naopak. Násobení to provádí pak Ahmes docela tak, jako při číslech celých, totiž zdvojnásobováním a zdesateronásobováním. Jen tak si lze vysvětliti, že náš egyptský písař zcela klidně píše na př. v č. 19.:

.	$\overset{\frown}{19}$	
. .	$\overset{\frown}{38}$	
. . . .	$\overset{\frown}{76}$	$\frac{1}{4}$
dohromady 6	$\overset{\frown}{114}$	$\frac{1}{6}$

Kdybychom tento postup přepsali moderně, dostali bychom přímo bolestný nesmysl toho druhu:

$$\tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{19} = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{19} = \tfrac{1}{38} + \tfrac{1}{76} = \tfrac{1}{114}.$$

Z tohoto příkladu i mnohých jiných míst vidíme, že autoři Ahmesových předloh dovedli spolu znásobiti dva kmenné zlomky. Rovněž dovedli kmenný zlomek násobiti číslem celým. Jen namátkou uvádím z čísla 41. slova: „Učiň $\frac{1}{20}$ z 960, t j. 48“. Zdá se, že si byli také vědomi, že $\frac{1}{n} \cdot m$ dává týž výsledek jako $m : n$. Nejlepší toho doklad jest okolnost, že Ahmes vždy používá výsledků své počáteční tabulky, uvedené slovy „děl 2 číslem....“, kdykoli má 2ma násobiti kmenný zlomek s lichým jmenovatelem. Ba jsem přesvědčen, že to bylo účelem této tabulky a nikoli, aby byla pomůckou pro dělení, jak ukáži jinde. Dále vidíme, že autoři oněch předloh znali vztah $\frac{1}{n} \cdot n = 1$. Rovněž jim bylo známo, že z rovnosti $\frac{1}{m} \cdot a = n$ plyne rovnost $\frac{1}{n} \cdot a = m$.

Mnohem těžším problémem, než násobení a dělení zlomků kmenných bylo jejich sčítání. Staří Egypťané problém ten rozřešili skutečně ženiálně. Doklady jejich postupu nalézáme ve zkouškách v jednotlivých úlohách Ahmesových. Cantor s Eisenlohrem jsou přesvědčeni, že Ahmes užívá zakrytě společného jmenovatele. Rodet[8]) dokazuje, opíraje se o analogie v arabské a hebrejské literatuře, že Ahmes, či lépe autoři jeho předloh měli na mysli pomocné jednotky, myšlénku to příbuznou s tak zv. „fausse possition“ nebo „regula falsi“, o níž jsem se již zmínil. Názor ten jest mnohem pravděpodobnější a také Hultsch[9]) se ho přidržuje. Má-li Ahmes sečísti řadu zlomků, položí zpravidla nejmenší zlomek roven 1. Ostatní zlomky vyjádří touto pomocnou jednotkou, při čemž není závadou, jsou-li vyjádřeny číslem smíšeným. Jako příklad stůjž zde zkouška z čísla 36. V čísle tom vypočteno, že

$$1 : 3\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{53}\ \tfrac{1}{106}\ \tfrac{1}{212}$$

Zkouška záleží v tom, že podíl se násobí dělitelem, což jest provedeno takto:

.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{53}$			$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{212}$
. .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{795}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{159}$			$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{636}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{265}$			$\frac{1}{530}$	$\frac{1}{1060}$

[8]) *L. Rodet:* „Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur égyptien“, Journ. asiat. (7) XVIII (1881) 184 nn a 390 nn.

[9]) L. c.

Součet těchto zlomků musí se rovnati 1. Nejdříve sečítá Ahmes malé zlomky:

$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{212}$			
20	*10*	*5*			. . . . *35*[10])
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{795}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	
35 $\frac{1}{3}$	*3* $\frac{1}{3}$	*1* $\frac{1}{3}$	*20*	*10*	. . . *70*
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{636}$		
88 $\frac{1}{3}$	*6* $\frac{2}{3}$	*3* $\frac{1}{3}$	*1* $\frac{2}{3}$		. . . . . . *100*
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{265}$	$\frac{1}{530}$	$\frac{1}{1060}$		
53	*4*	*2*	*1*		. . . . . . *60*
				$\frac{1}{4}$	. . . 265

Za pomocnou jednotku volen nejmenší zlomek $\frac{1}{1060}$, musí tedy souče- všech zlomků, vyjádřených v pomocných jednotkách, býti 1060. Malé zlomky, zde počítané, dají dohromady 265 pomocných jednotek, t. j. $\frac{1}{4}$ jednotky původní. K tomu přistupuje ještě $\frac{1}{2} = 530$ pom. jedn. a $\frac{1}{4} = 265$ pom. jedn., t. j. celkem 1060 pom. jedn.

Zřídka kdy volí Ahmes za pomocnou jednotku jiný zlomek než nejmenší v počtu se vyskytující. Tak v čísle 31 sečítá zlomky $\frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}\ \frac{1}{28}$. Čekali bychom za pomocnou jednotku $\frac{1}{28}$, avšak nalézáme tu $\frac{1}{42}$. Snad by to bylo lze vysvětliti takto: Jde tu o dělení 33 : $1\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{7}$. Chtěl-li Ahmes vyjádřiti dělitele celistvým počtem pomocných jednotek, musil $\frac{1}{7}$ položiti rovnou číslu dělitelnému 2 a 3. Lze ukázati, že Ahmes poznal dělitelnost těmito dvěma čísly. Proto položil $\frac{1}{7} = 6$ pom. jedn. Zde se ovšem odkloňuje od svého obvyklého způsobu. Jest snad č. 31. opsáno z jiné předlohy, než ostatní předlohy, či převzal Ahmes tuto nesrovnalost již ze své předlohy? Rovněž v prvé skupině počtu „seqem", t. j. v č. 7—20, jsou pomocné jednotky jinak voleny. Než to souvisí s celým uspořádáním, jak o tom ihned promluvíme.

Sčítání zlomků bylo hodně zdlouhavým a složitým výpočtem. A přece, zvláště při dělení, bylo ho nutně zapotřebí. Hlavně musil starý počtář často sčítati a znáti řady, jichž součet dával 1 nebo velké zlomky, jako $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ atd. Tak při zkouškách na základě pomocných jednotek sečítávány zlomky malé, kdežto velké zlomky přičítány hned k celkům jakožto čísla, s nimiž Egypťané dobře počítali z paměti. Také při dělení Ahmes doplňoval nejraději řady zlomků, které měl od 1 odčítati, na ony velké zlomky. Bylo tudíž pro Egypťany s výhodou, aby si některé takové řady předem vypočítali a poznamenali. A to, myslím, jest podkladem počtu „seqem" čili „doplnění" (č. 7—23). Tuto myšlénku také naznačuje M. Cantor,[11])

[10]) Čísla tištěná ležatě píše Ahmes červeně.

[11]) Vorl. I_3 71.

jenom že se domnívá, že prvá skupina (č. 7—20) jest doplnění multiplikativní, tedy že tu jde nikoliv o sečítání nebo odčítání, nýbrž o násobení. Rodet[12]) považuje za účel těchto příkladů empirický důkaz věty: „Pokaždé, když se s různými veličinami provádí táž operace aritmetická, jsou výsledky úměrny daným veličinám.“ Proti tomu lze namítnouti, že věta ta v tomto aspoň znění není obecně správná,[13]) o čemž by se byli mohli i Epypťané přesvědčiti. Druhou oprávněnou námitku činí Cantor[14]), že slovo „poměr“ u Ahmesa vůbec nepřichází a že snad Rodet do Ahmesova spisu něco vkládá, čeho tam není. Upozorňuji ještě na to, že Ahmesovi se nejedná o všeobecná pravidla, kteráž neodpovídala egyptskému duchu. A kdyby egyptský písař nebo spíše autor jeho předlohy pomýšlel na podobné pravidlo, byl by je jistě také dovedl vysloviti, jak to dovedl v č. 61, kde podává všeobecné pravidlo, jak vypočísti $\frac{2}{3}$ z kmenného zlomku. Rodet však správně obrátil naši pozornost na okolnost, že čísla, z nichž výpočty v počtu „seqem“ vycházejí, jsou úměrná. Okolnost ta jistě není náhodná. Při tom jest však patrno, že pořad tak, jak jej nalézáme u Ahmesa, jest přeházen. Snad byla předloha, z níž náš písař opisoval, chatrná, o čemž by také svědčily hojné opisovačské chyby. Originál vykazoval asi jiný pořad příkladů.

Autor, jak se mi zdá, chtěl vytvořiti součty zlomků, jež volil tak, aby mohl počet dobře kontrolovati, respektive aby znal výsledek předem. Snad věděl také předem, že dostane jednoduchý výsledek, násobí-li $(\frac{1}{4}\ \frac{1}{28}) \cdot (1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4})$, t. j. $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{4}$. Násobení to provedl v č. 7 takto:

•	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$
	7	*1*[15])
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$
	3$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{112}$
	1$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
dohromady $\frac{1}{2}$		

Na základě pomocných jednotek tu zjistil, že řada

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}=\frac{1}{2}.$$

Zdvojnásobený násobenec násobí v č. 9. týmž dělitelem i musí dostati dvojnásobný součin a dochází k řadě

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}=1.$$

Aby neporušil systém, opakuje v č. 7b, které zařadil mezi čísla 9 a 10, počet z čísla 7. Tu si uvědomil, že $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=2:7$, tedy že $\frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{1}{7}$, i provedl počet s touto změnou v č. 10, čímž dostal řadu $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$. Z této řady vyvodil v č. 11, 12 a 14 řady

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}=\frac{1}{8} \text{ a } \frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}=\frac{1}{16}.$$

K výsledkům těm došel vždy novým násobením čísel $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$ a $\frac{1}{28}$.

---

12) L. c., 390 nn.

13) Na př. hodnoty $\frac{a}{b}$, $a \cdot b$, $1+a+b$.

14) Vorl. I_3, 73.

15) Čísla ležatě tištěná píše Ahmes červeně.

násobitelem $1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$. Podle vzoru původního čísla 7 byly pak odvozeny příklady č. 13 a 15, t. j. řady

$$\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{112}+\tfrac{1}{124}+\tfrac{1}{448}=\tfrac{1}{8} \text{ a}$$

$$\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{128}+\tfrac{1}{224}+\tfrac{2}{448}+\tfrac{1}{896}=\tfrac{1}{16},$$

kdežto příklad pro řadu

$$\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{56}+\tfrac{1}{112}+\tfrac{1}{228}=\tfrac{1}{4}$$

při opisování asi vypadl.

Příklad č. 8 tvoří s č. 16 až 19 zase zvláštní skupinu. Vytvářejí se tu řady $a+\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a=2a$, kde a jest kmenný zlomek. Autoři Ahmesových předloh velmi dobře věděli, že $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=2$ a proto jest přirozeno hledati smysl těchto počtů jinde, než v pouhém násobení zlomků, jak to dobře vycítil Rodet.[16]) Součty, které tu dostáváme, jsou

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{2},\qquad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=1,\qquad \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{18}+\tfrac{1}{9}=\tfrac{2}{3},$$

$$\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{18}=\tfrac{1}{3},\qquad \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{18}+\tfrac{1}{36}=\tfrac{1}{6} \text{ a } \tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{36}+\tfrac{1}{72}=\tfrac{1}{12}.$$

Hodnoty součtů tvoří v prvé skupině řadu 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ a ve druhé tvoří řadu 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$. Tyto řady byly u Egypťanů velmi oblíbeny, jak lze ukázati z metod egyptského dělení. Pomocná jednotka volena pro všecky úlohy jedné skupiny táž. Byla tedy souvislost úloh jedné skupiny úmyslná a autor patrně také vypočítával hodnoty v pomocných jednotkách půlením hodnot z úlohy předešlé. Ve skupině prvé jest to $\frac{1}{28}$, tedy jako obvykle nejmenší zlomek původního čísla ($\frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$) počáteční úlohy č. 7. Ve druhé skupině bychom na základě č. 8 očekávali buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{1}{12}$, volena však pro všechny úlohy za pomocnou jednotku $\frac{1}{18}$. Proč, nelze rozhodnouti.

Třetí skupinu tvoří čísla 21 až 23, v nichž se od 9 v č. 21 a 22 a od $\frac{2}{3}$ v č. 23 odčitají řady zlomků.

Rozdíly takto určené jsou:

$$1 - \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{15}\right)=\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15},$$

$$1 - \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{30}\right)=\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{10} \text{ a}$$

$$\tfrac{2}{3} - \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{45}\right)=\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{40}.$$

Proč voleni právě tito menšitelé, jest nesnadno určiti.

*

Les fractions égyptiennes.

(Extrait de l'article précédent.)

S'appuyant sur les documents recueillis par K. Lethem (Von Zahlen und Zahlwörtern bei den alten Aegyptern, etc.), l'auteur

[16]) L. c.

considère le calcul des fractions primitives comme un degré naturel dans l'évolution des mathématiques, et il ne suppose pas que les savants égyptiens aient possédé la notion générale d'une fraction à un numérateur supérieur à l'unité, et qu'ils aient connu la réduction au dénominateur commun. L'auteur tâche de démontrer la vraisemblance de cette hypothèse.

Les Egyptiens obtenaient les fractions, tout d'abord, en divisant l'unité plusieurs fois par deux et par trois. Lorsque, plus tard', ils ont obtenu, en divisant par d'autres nombres, une échelle d'unités fractionnaires, la tendance d'arranger l'échelle les a amenés involontairement à la règle de ne pas juxtaposer simplement deux unités égales, mais de faire usage de la possibilité de former des séries de fractions, décroissantes aussi uniformément que possible. Il était important dans cette évolution que cette série de fractions donnait une série de valeurs rapprochées, de plus en plus précises. La tendance d'arranger l'échelle se manifeste aussi par ce que les Egyptiens exprimaient avec conséquence la quantité du blé par des parties de la mesure „bécha"; l'auteur constate cela dans les calculs faits sur les tablettes, trouvées par H. Brugschem au musée de Gizeh (H. Brugschem-Poscha, „Aus dem Morgenlande", 25). Les Egyptiens se servaient des fractions comme de nouvelles unités. Dans leurs calculs ils faisaient usage des relations qui sont exprimées, dans la notation actuelle, comme suit:

$$\frac{1}{na} = \frac{1}{n} : a, \frac{1}{n:a} = \frac{1}{n} . a, \frac{1}{m} . \frac{1}{n} = \frac{1}{m . n}, m : n = m . \frac{1}{n}, \frac{1}{n} . n = 1, \frac{1}{m} . a = n,$$

$$\text{je-li } \frac{1}{n} . a = m.$$

Ils éxécutaient l'addition et la soustraction des fractions primitives au moyen d'unités auxiliaires, comme l'a montré Rodet [Journ. asiat. (7) XVII, (1881), 184 sq., 396 sq]. Ils choisissaient, en général, pour unité auxiliaire la plus petite fraction de la somme. L'auteur donne des raisons pour son opinion sur ce que le calcul „seqem" dans l'oeuvre d'Ahmes avait pour but de former des séries de fractions ayant la somme égale a $1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3.2^n}$, ces nombres étant employés surtout dans la division.

O projektivní geometrii.

Napsal *Jan Vojtěch* v Brně.

V jednotlivých vědách nebo jejich částech jest občas záhodno přehlédnout dosavadní vývoj a uvědomit si z něho vyplývající současný stav, vedoucí myšlenky věcné i methodické. V souvislosti