Eduard Čech

O jedné třídě ploch zborcených

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 18--24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123269

Sur l'application du principe de la projection à la théorie des correspondances géométriques.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette application est fondée sur le théorème suivant:

Étant donné dans un espace E_n à n dimensions une variété algébrique V_{n-1} à $(n-1)$ dimensions de l'ordre m, ayant un point $(m-1)$-uple, et un espace linéaire E_{n-1} (à $n-1$ dimensions), on peut considérer la représentation de la variété donnée, qu'on obtient en la projetant de son point multiple sur l'espace E_{n-1}, comme le résultat d'une transformation Cremonienne C de l'espace donné.

Si, maintenant, on connaît un groupe G de transformations (Cremoniennes) dans l'espace E_n reproduisant V_{n-1}, on en déduit un groupe $G' = CGC$ dans l'espace E_{n-1}. On peut, ainsi, étudier, en partant des transformations simples — par ex. linéaires — d'un espace, des transformations plus compliquées d'un espace à un moindre nombre de dimensions.

Si V_{n-1} est, en particulier, une quadrique, et si G est un groupe d'homographies reproduisant cette quadrique, on obtient ainsi un groupe de transformations quadratiques dans E_{n-1}. Plusieurs exemples de ces groupes sont donnés.

On peut appliquer aussi la méthode inverse; l'auteur arrive par là à une proposition concernant la correspodance sur la quintique gauche hyperelliptique.

O jedné třídě ploch zborcených.

Eduard Čech.

1. Diferenciální systém

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dz}{dx}+q(x)y+\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx}z=o,\\ &\frac{d^2z}{dx^2}+p_2(x)\frac{dy}{dx}+\left[q(x)+\frac{1}{4}\right]z+\frac{1}{2}\frac{dp_2}{dx}y=o \end{aligned}$$

definuje až na kolineace zborcenou plochu Π. Je-li totiž

$$\overset{(1)}{y},\ \overset{(1)}{z};\ \overset{(2)}{y},\ \overset{(2)}{z};\ \overset{(3)}{y},\ \overset{(3)}{z};\ \overset{(4)}{y},\ \overset{(4)}{z}$$

fundamentální systém řešení systému (1), považujme $(\overset{(1)}{y}, \overset{(2)}{y}, \overset{(3)}{y}, \overset{(4)}{y})$ za homogení souřadnice bodu P_y a $(\overset{(1)}{z}, \overset{(2)}{z}, \overset{(3)}{z}, \overset{(4)}{z})$ za homogení souřadnice bodu P_z. Přímka P_yP_z je pak tvořící přímkou plochy Π.

Dosadíme-li do (1)

$$x = f(\xi),\ y = \alpha(\xi)\eta + \beta(\xi)\zeta,\ z = \gamma(\xi)\eta + \delta(\xi)\zeta,$$

kde funkce $f, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou vázány pouze podmínkou $\alpha\delta - \beta\gamma \neq o$, obdržíme nový lineární diferenciální systém, jenž definuje taktéž plochu Π. Má-li však transformovaný system podržeti tvar systému (1), možno voliti pouze

$$x = \pm\xi + a,\ y = b\eta,\ z = c\zeta \tag{2}$$

nebo

$$x = \pm i\xi + a,\ y = b\zeta,\ z = c\eta, \tag{2bis}$$

kde a, b, c jsou numerické. Vzhledem k tomu pravíme, že systém (1) je v kanonickém tvaru, určitěji ve **fleknodálním kanonickém tvaru**.[1]) Body P_y a P_z jsou totiž **fleknody** tvořící přímky plochy Π, t. j. každým z nich jde přímka, **fleknodální tečna**, protínající čtyři soumezné tvořící přímky plochy Π.[2]) Existují ostatně zborcené plochy, pro něž na každé tvořící přímce oba fleknody splynou. Nesplynou-li však fleknody na obecné tvořící přímce zborcené plochy Π, a není-li Π kvadrika, lze ji vždy definovati až na kolineace systémem tvaru (1).

2. Fleknodální tečna bodem P_y jde bodem P_ϱ o souřadnicích[3])

$$\varrho^{(i)} = 2\frac{dy^{(i)}}{dx} + p_1 z^{(i)}.$$

Je-li nejprve $p_1 \equiv o$, prvá rovnice (1) ukazuje, že mezi $\overset{(1)}{y}, \overset{(2)}{y}, \overset{(3)}{y}, \overset{(4)}{y}$ existují dvě lineární homogení relace, a tedy místem bodu P_y jest **řídící přímka** plochy Π. Naopak, má-li Π řídící přímku, vymizí p_1 nebo p_2. Není-li však $p_1 = o$, položme

$$y = p_1 \overset{-1}{z} \qquad 2\frac{dy}{dx} + p_1 z = \frac{dp_1}{dx}\overset{-1}{z} + \overset{-1}{y}. \tag{3}$$

Počtem poněkud zdlouhavým, ale prostým potíží dovodí se z (1) a (3) rovnice

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\overset{-1}{y}}{dx^2} + \overset{-1}{p_1}\frac{d\overset{-1}{z}}{dx} + \overset{-1}{q}\,\overset{-1}{y} + \frac{1}{2}\frac{d\overset{-1}{p_1}}{dx}\overset{-1}{z} = o, \\ &\frac{d^2\overset{-1}{z}}{dx^2} + \overset{-1}{p_2}\frac{d\overset{-1}{y}}{dx} + \left(\overset{-1}{q} + \frac{1}{4}\right)\overset{-1}{z} + \frac{1}{2}\frac{d\overset{-1}{p_2}}{dx}\overset{-1}{y} = o, \end{aligned} \tag{4}$$

v nichž

$$\begin{aligned} \overset{-1}{p_1} &= 2\frac{d^2p_1}{dx^2} - \frac{1}{p_1}\left(\frac{dp_1}{dx}\right)^2 + 4p_1q - p_1^2p_2 + \frac{p_1}{2}, \\ \overset{-1}{p_2} &= -\frac{1}{p_1}, \\ \overset{-1}{q} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1}\frac{dp_1}{dx}\right)^2 - q - \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) *Wilczynski*, **Projective defferential geometry of curves and ruled surfaces** (v dalším citováno prostě *W*), str. 116—117.

[2]) Pro důkaz odkazuji čtenáře na *W*, kapitola VI. [3]) *W*, str. 147—149.

Jako rovnice (1) definovaly plochu Π, definují (4) novou zborcenou plochu $\overset{-1}{\Pi}$, která jest, jak rovnice (3) ukazují, místem té fleknodální tečny plochy Π, jež jde bodem P_y. Ježto rovnice (4) jsou opět ve fleknodálním kanonickém tvaru, jest dle prvé (3) bod P_y i na $\overset{-1}{\Pi}$ fleknod.[4])

Není-li $p_2 \equiv o$, učiníme podobně

$$(3') \qquad \overset{1}{z} = p_2 y, \; 2\frac{dz}{dx} + p_2 y = \frac{dp_2}{dx}\overset{1}{y} + \overset{1}{z},$$

a obdržíme diferenciální systém

$$(4') \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2\overset{1}{y}}{dx^2} + \overset{1}{p}_1 \frac{d\overset{1}{z}}{dx} + \overset{1}{q}\overset{1}{y} + \frac{1}{2}\frac{d\overset{1}{p}_1}{dx}\overset{1}{z} = o, \\ &\frac{d^2\overset{1}{z}}{dx^2} + \overset{1}{p}_2 \frac{d\overset{1}{y}}{dx} + \left(\overset{1}{q} + \frac{1}{4}\right)\overset{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{d\overset{1}{p}_2}{dx}\overset{1}{y} = o, \end{aligned}$$

v němž

$$(5') \qquad \begin{aligned} &\overset{1}{p}_1 = -\frac{1}{p_2}, \\ &\overset{1}{p}_2 = 2\frac{d^2p_2}{dx^2} - \frac{1}{p_2}\left(\frac{dp_2}{dx}\right)^2 + 4p_2 q - p_1 p_2{}^2 + \frac{p_2}{2}, \\ &\overset{1}{q} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_2}\frac{dp_2}{dx}\right)^2 - q - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zborcená plocha $\overset{1}{\Pi}$ definovaná systémem (4′) jest místem oné fleknodální tečny plochy Π, jež jde bodem P_z. Krátce zveme $\overset{-1}{\Pi}$ a $\overset{1}{\Pi}$ fleknodální plochy zborcené plochy Π.

3. Z rovnice (5) nebo (5′) vypočtěme p_1, p_2, q a porovnejme s (5′) nebo (5): původní plocha Π jest jednou fleknodální plochou plochy $\overset{-1}{\Pi}$ i plochy $\overset{1}{\Pi}$[5]) Odtud vychází, že, počínaje plochou Π, lze obecně dovoditi v obou smyslech neomezenou řadu zborcených ploch

$$(6) \qquad \ldots, \overset{-3}{\Pi}, \overset{-2}{\Pi}, \overset{-1}{\Pi}, \Pi, \overset{1}{\Pi}, \overset{2}{\Pi}, \overset{3}{\Pi}, \ldots$$

té vlastnosti, že fleknodální plochy kterékoliv plochy řady jsou obě sousední plochy řady. Výjimka nastane, má-li některá plocha řady (6) řídící přímku; ve tvoření řady v příslušném smyslu nelze pak pokračovati. Bylo by zajímavo nalézti všecky případy, kdy řada (6) zastaví se takto v obou smyslech. Jiný úkol, jemuž dává podnět řada (6), jest nalézti ty případy, kdy dvě plochy řady

[4]) W, str. 153.
[5]) W, str. 178.

jsou kolineární. Nejjednodušším takovým úkolem chceme se obírati v tomto článku: Jest nalézti takové zborcené plochy Π, aby fleknodální plochy $\overset{-1}{\Pi}$ a $\overset{1}{\Pi}$ byly kolineární, při čemž mají si odpovídati obě fleknodální tečny příslušné téže tvořící přímce plochy Π. Dle odst. 1. je k tomu nutné a stačí, aby diferenciální systém (4) přešel v systém (4′) píšeme-li za $\overset{-1}{y}$, $\overset{-1}{z}$ po řadě $\overset{1}{y}$, $a\overset{1}{z}$, kde a je numerické, čili aby bylo

$$\overset{1}{p}_1 = a\,\overset{-1}{p}_1,\quad a\overset{1}{p}_2 = \overset{-1}{p}_2,\quad \overset{1}{q} = \overset{-1}{q}.\text{[6])}$$

Dosadíme-li do třetí z těchto podmínek z (5) a (5′) vidíme, že je buď

$$\frac{d\log(p_1p_2)}{dx} = o$$

nebo

$$\frac{d\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{dx} = o.$$

Snadný počet, jejž pominu, dá pro koeficienty systému (1) v prvém případě

(A) $$p_1 = ae^{\lambda x},\ p_2 = be^{-\lambda x},\ q = c,$$

kde a, b, c, λ jsou konstanty, a ve druhém případě

(B) $$p_1 = a\varphi(x),\ p_2 = \frac{\varphi(x)}{a},$$

$$q = -\frac{1}{2\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4b\varphi^2},$$

kde a, b jsou konstanty a φ libovolná funkce x.

4. Uvažujme nejprve (A). Diferenciální rovnice (1) nyní jsou:

(7) $$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + a\,e^{\lambda x}\frac{dz}{dx} + c\,y + \frac{a\lambda}{2}e^{\lambda x}z = 0.\\ &\frac{d^2z}{dx^2} + b\,e^{-\lambda x}\frac{dz}{dx} + c\,z - \frac{b\lambda}{2}e^{-\lambda x}y = 0.\end{aligned}$$

Položíme-li

(8) $$x = \xi + k,\quad y = e^{\frac{\lambda k}{2}}\eta,\quad z = e^{\frac{-\lambda k}{2}}\zeta,$$

kde k je libovolná konstanta, přejde systém (7) v systém o týchž koeficientech. Substituce (8) je však tvaru (2); dle toho, co jsme s počátku řekli, zvolíme-li jakkoli k, existuje kolineace, jíž se nemění plocha Π, kdežto libovolná její přímka tvořící příslušná hodnotě $x = \xi$ přejde v přímku tvořící příslušnou hodnotě $x = \xi + k$. Plocha Π připouští tedy grupu kolineací o jednom parametru.

[6]) V řadě (6) jsou tedy všecky členy lichého (sudého) indexu mezi sebou kolineární; a podobně kdykoli jsou v řadě dva kolineární členy.

Obráceně: Připouští-li zborcená plocha Π, jež má na obecné přímce tvořící dva různé fleknody, grupu kolineací o jednom parametru, jsou její fleknodální plochy mezi sebou kolineární. Vskutku buďte (1) diferenciální rovnice plochy Π ve fleknodálním kanonickém tvaru. Dle odst. 1. kolineacím grupy odpovídají transformace tvaru

$$x = \xi + c, \quad y = \alpha(c)\,\eta, \quad z = \beta(c)\,\zeta,$$

neměnící koeficientů systému (1). Tedy

$$\frac{\beta}{\alpha} p_1(\xi + c) = p_1(\xi), \ \frac{\alpha}{\beta} p_2(\xi + c) = p_2(\xi), = q(\xi + c) = q(\xi),$$

a tudíž
$$\frac{d \log p_1(x)}{dx}, \quad p_1(x) p_2(x), \quad q(x)$$

jsou konstanty, a vracíme se k rovnicím (A).

5. Uvažujme nyní rovnice (B). Z (5′) máme

$$\overset{1}{(B)} \qquad \overset{1}{p}_1 = -\frac{a}{\varphi(x)}, \quad \overset{1}{p}_2 = -\frac{1}{ab\varphi},$$

$$\overset{1}{q} = \frac{1}{2\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{d \log \varphi}{dx}\right)^2 - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4b\varphi^2}$$

Odtud vidíme, že jest

$$\frac{p_1}{p_2} = a^2, \quad \frac{\overset{1}{p}_1}{\overset{1}{p}_2} = a^2 b.$$

Avšak $\frac{d}{dx}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = o$ je podmínka, aby plocha Π náležela lineárnímu komplexu[1]): Jsou-li obě fleknodální plochy zborcené plochy Π kolineární tak, že obě fleknodální tečny téže tvořící přímky plochy Π si odpovídají, (a nepřipouští-li Π ∞^1 kolineací) náleží jak Π, tak obě fleknodální plochy lineárním komplexům. Že naopak v tomto případě vskutku $\overset{-1}{\Pi}$ a $\overset{1}{\Pi}$ jsou kolineární, je zřejmo: žádaná kolineace je součin polarity vzhledem ke komplexu, jemuž náleží Π, a polarity vzhledem ke komplexu, jemuž náleží $\overset{1}{\Pi}$.

6. Buďte Ω, $\overset{1}{\Omega}$ lin. komplexy, obsahující resp. Π, $\overset{1}{\Pi}$. Zobrazme známým způsobem přímky prostoru na body kvadriky Q o čtyřech dimensích náležející prostoru S_5 o pěti dimensích. Buďte α, $\overset{1}{\alpha}$ nadroviny, protínající Q v obrazech K, $\overset{1}{K}$ komplexů Ω, $\overset{1}{\Omega}$. Obrazem Π v S_5 je křivka C ležící na K. Průsek kvadriky K s oskulačním prostorem S_3 o třech dim. čáry C v kterémkoli

[1]) W, str. 167.

jejím bodě P jest obrazem oskulační lineární kongruence plochy Π, a tedy polární přímka r tohoto S_3 vzhledem ke Q protne Q v obrazech $\overset{1}{F}$, $\overset{-1}{F}$ fleknodálních tečen. Ježto C leží v α, prochází r pro každou plochu P na C pólem O nadroviny α vzhledem ku Q. Buď P_0 průsek r s α čili průmět $\overset{1}{P}$ s O do α. Opisuje-li P čáru C, opíše $\overset{1}{P}$ obraz $\overset{1}{C}$ fleknodální plochy $\overset{1}{\Pi}$; $\overset{1}{C}$ leží na $\overset{1}{K}$, a tedy její průmět C_0 s O do α, místo bodu P_0, leží na průmětu K_0 kvadriky $\overset{1}{K}$ s O do α. Buď k kvadrika o dvou dimensích, v níž protne Q průsečný prostor β nadrovin α a $\overset{1}{\alpha}$. Čtenář snadno nahlédne, že K a K_0 se navzájem dotýkají ve všech bodech na k. Křivka C_0 kvadriky K_0 je zřejmě místo pólů oskulačních S_3 čáry C vzhledem ke K. Tyto S_3 samy dotýkají se kvadriky $\overline{K}$ prostoru α, polární ke K_0 vzhledem ke K, jež také se dotýká K ve všech bodech na k.

7. Obráceně: V prostoru α o čtyřech dimensích buďte dány dvě kvadriky o třech dim. K a $\overline{K}$, bez dvojného bodu dytýkající se navzájem ve všech bodech společného průseku k s prostorem β o třech dim. Čára C nechť leží na K a její oskulační S_3 dotýkají se $\overline{K}$[1]). Proložíme-li kvadrikou K kvadriku Q o čtyřech dimensích, bez dvojného bodu, a zobrazíme-li přímky prostoru Σ o třech dimensích na body kvadriky Q, jest C obrazem zborcené plochy Π uvažovaného typu.

8. Jest rozeznávati dva případy, dle toho zda β se dotýká K či ne.[2]) Nedotýká-li se β kvadriky K, lze v α zavésti takovou euklidovskou metriku, aby K a $\overline{K}$ se jevily jako soustředné nadkoule. Ježto oskulační S_3 čáry C dotýkají se $\overline{K}$, totéž platí o oskulačních S_2.[3]) Tyto S_2 protínají tudíž K ve shodných kružnicích. Čára C jeví se takto jako čára konstantní křivosti trojrozměrné nadkoule.

Dotýká-li se β kvadriky K, buď A bod dotyku. Zaveďme v α takovou euklidovskou metriku, aby K byla nadkoulí a bod A byl v konečnu. Buď T prostor o třech dimensích, rovnoběžný s tečným prostorem β nadkoule K v A. Krátký počet, který přenechávám čtenáři, ukáže, že stereografický průmět s A do T systému průsečných koulí nadkoule K s tečnými nadrovinami kvadriky $\overline{K}$ jest systém shodných koulí. Oskulační koule průmětu C' čáry C s A do T jsou tedy shodné. Čára C' jest tedy čára konstantní křivosti euklidovského trojrozměrného prostoru T.

*

[1]) Čára C nesmí býti obsažena v nadrovinném průseku kvadriky K.

[2]) Jinak řečeno, dle toho, zda kongruence přímek společných komplexům Ω a $\overset{1}{\Omega}$ je speciální či ne.

[3]) Korelativně: Ježto body C leží na K, tečny C dotýkají se K.

Sur une classe de surfaces réglées.

(Extrait de l'article précédent.)

Je détermine les surfaces réglées Π qui jouissent de la propriété suivante: les deux tangentes flecnodales de *M. Wilczynski*, appartenant à chaque génératrice de Π, correspondent l'une à l'autre dans une homographie fixe. Il y a deux espèces de surfaces Π. Les surfaces de la première dépendent de trois constantes essentielles et admettent un groupe continu d'homographies à un paramètre. La seconde espèce, qui dépend d'une fonction arbitraire, jouit de la propriété caractéristique suivante: La surface Π elle-même et les lieux $\overset{-1}{\Pi}$, $\overset{1}{\Pi}$ des deux tangentes flecnodales de Π appartiennent à des complexes linéaires. Ces trois complexes font partie d'un faisceau; la congruence linéaire $\varDelta$ base de ce faisceau peut être générale ou spéciale. Voici comment on peut obtenir les équations d'une surface Π de seconde espèce, dans les deux cas. Si $\varDelta$ est générale, soient

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t), \quad x_4 = \varphi_4(t)$$

les coordonnées Cartésiennes d'une courbe C à courbure constante, située sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0.$$

Les coordonnées kleinéennes des génératrices de Π sont:

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t), \quad \varphi_4(t), \quad 1, \; 0.$$

Si, au contraire, $\varDelta$ est spéciale, soient

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t)$$

les coordonnées cartésiennes d'une courbe C' à courbure constante de l'espace ordinaire. Les coordonnées kleinéennes des génératrices de Π sont

$$2\varphi_1(t), \quad 2\varphi_2(t), \quad 2\varphi_3(t), \quad 1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2,$$
$$i(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2), \; 1, \; 0.$$

O Laguerrově methodě stanovení rodu celistvé transcendenty.

Napsal *K. Čupr.*

1. Uvažujme řadu $S(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_n}{z - a_n}$;

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots,$$

$\lim |a_n| = \infty$, $\lim |a_n - a_{n-1}| \neq 0$, $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{A_n}{a_n}$ nechť konverguje absolutně.