Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Vojtěch
O projektivní geometrii

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 177--186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123266

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1923

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

considère le calcul des fractions primitives comme un degré naturel dans l'évolution des mathématiques, et il ne suppose pas que les savants égyptiens aient possédé la notion générale d'une fraction à un numérateur supérieur à l'unité, et qu'ils aient connu la réduction au dénominateur commun. L'auteur tâche de démontrer la vraisemblance de cette hypothèse.

Les Egyptiens obtenaient les fractions, tout d'abord, en divisant l'unité plusieurs fois par deux et par trois. Lorsque, plus tard', ils ont obtenu, en divisant par d'autres nombres, une échelle d'unités fractionnaires, la tendance d'arranger l'échelle les a amenés involontairement à la règle de ne pas juxtaposer simplement deux unités égales, mais de faire usage de la possibilité de former des séries de fractions, décroissantes aussi uniformément que possible. Il était important dans cette évolution que cette série de fractions donnait une série de valeurs rapprochées, de plus en plus précises. La tendance d'arranger l'échelle se manifeste aussi par ce que les Egyptiens exprimaient avec conséquence la quantité du blé par des parties de la mesure „bécha"; l'auteur constate cela dans les calculs faits sur les tablettes, trouvées par H. Brugschem au musée de Gizeh (H. Brugschem-Poscha, „Aus dem Morgenlande", 25). Les Egyptiens se servaient des fractions comme de nouvelles unités. Dans leurs calculs ils faisaient usage des relations qui sont exprimées, dans la notation actuelle, comme suit:

$$\frac{1}{na} = \frac{1}{n} : a, \quad \frac{1}{n:a} = \frac{1}{n} . a, \quad \frac{1}{m} . \frac{1}{n} = \frac{1}{m . n}, \quad m : n = m . \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} . n = 1, \quad \frac{1}{m} . a = n,$$

$$\text{je-li } \frac{1}{n} . a = m.$$

Ils éxécutaient l'addition et la soustraction des fractions primitives au moyen d'unités auxiliaires, comme l'a montré Rodet [Journ. asiat. (7) XVII, (1881), 184 sq., 396 sq]. Ils choisissaient, en général, pour unité auxiliaire la plus petite fraction de la somme. L'auteur donne des raisons pour son opinion sur ce que le calcul „seqem" dans l'oeuvre d'Ahmes avait pour but de former des séries de fractions ayant la somme égale a $1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3.2^n}$, ces nombres étant employés surtout dans la division.

O projektivní geometrii.

Napsal *Jan Vojtěch* v Brně.

V jednotlivých vědách nebo jejich částech jest občas záhodno přehlédnout dosavadní vývoj a uvědomit si z něho vyplývající současný stav, vedoucí myšlenky věcné i methodické. V souvislosti s tím jest ve vhodné době zapotřebí podati celkový obraz samostatného oboru vědního jako synthesu hlavních výsledků rozmanitého a podrobného badání speciálního. Odtud pak přirozeně plynou, také se zřetelem k příbuzným oborům, pravděpodobné směrnice budoucí práce.

Myslím, že projektivní geometrie je ve stavu, kdy jest na místě souborný pohled na dosažené výsledky v uvedeném smyslu. Je tomu letos sto let od doby, co vyšlo hlavní dílo předního zakladatele geometrie projektivní, J. V. Ponceleta Traité des propriétés projectives des figures; to by však byl jen vnější podnět, nemající jako všechna jubilea valné ceny skutečné. Ale projektivní geometrie, dosáhnuvši prvotním rozmachem v krátké poměrně době značného rozsahu, jest už delší čas ve zvolněném vývoji, kdy se uplatňují kritický zřetel k základům, snaha po soustavnosti, methodická vodítka, rozšiřování a doplňování předmětu. Taková klidnější doba je zajisté příhodná pro zmíněný účel; neboť mnohého bylo dosaženo, a v současných pracích lze dobře postřehnout charakteristické známky. Budiž tedy dovoleno podati zcela stručný náčrtek hlavních rysů současné geometrie projektivní.

1. Nehledíme-li k zárodkům v řecké geometrii, jež lze nalézti ve spisech Apolloniově a Pappově, byla projektivní geometrie připravována perspektivou, která hlavně v době renaissanční byla potřebna k pracím uměleckým. Odtud vyvíjela se směrem praktickým geometrie deskriptivní a spolu s ní, později však samostatně a směrem theoretickým geometrie projektivní. Nejvýznamnějšími předchůdci nového směru geometrického byli Desargues a Pascal, kteří počali kuželosečky vyšetřovati jako centrální průměty kružnice; Desargues je také původcem pojmu nekonečně vzdáleného bodu a přímky. Jest dále pozoruhodno, že při svých úvahách o příčkách, jejichž theorie byla tehdy hojně pěstována, snažil se Carnot nalézti konstantní zákony pro jednotlivé druhy měnících se útvarů.

Po rozmanitých jednotlivostech, jež se zejména kolem r. 1800 objevovaly u tehdejších geometrů, stal se prvním zakladatelem geometrie projektivní Poncelet svým proslulým dílem, uveřejněným r. 1822, jehož hlavní obsah je plodem úvah, konaných autorem v ruskem zajetí od jara r. 1813. Hledaje pro úvahy ryze geometrické methodu podobně účinnou jako byla methoda analytická, nalezl ji Poncelet v t. zv. principu kontinuity, podle něhož lze speciální případ dosti obecně pojatý pokládati za zástupce obecného případu a z vlastností onoho souditi na útvary, odvozené z něho promítáním a protínáním; jednotícím prvkem všech útvarů určité skupiny byla mu spojitá změna tvaru, největší dosah principu byl pak v tom, že dovoloval zahrnovati také prvky imaginární. Hlavní zásluhou Ponceletovou jest, že první vědomě jal se zkoumati vlastnosti geometrických útvarů, jež jsou invariantní při projekci. Jemu vděčí geometrie projektivní také za pojem i užití homologie a polárnosti v rovině i v prostoru; jeho pojetí duálnosti dovršil v obecný zákon Gergonne.

V rychlém sledu následovaly potom ostatní základní koncepce nové geometrie. Möbius a Chasles pojímali a zkoumali projektivní vztahy, zejména kollineaci v rovině a v prostoru, jako transformace, čímž obrátili pozornost na nejdůležitější moderní pojem geometrický; od nich pochází také zavedení a užití dvojpoměru čtyř elementů, spec. dvojpoměru harmonického v geometrii projektivní. Steiner položil základy pro konstruktivní vyvození geomerie projektivní tím, že stanovil základní útvary prvních tří řádů, složené z bodů, přímek a rovin, i vytvoření útvarů odvozených. Myšlenka konstruktivního vytvoření složitějších útvarů geometrických byla potom mnohými geometry dále rozvíjena několika směry, hlavně tím, že projektivní korespondence přenesena na útvary odvozené i na rozmanité soustavy jejich a umožněno tak další tvoření nových útvarů dle téhož principu.

Výsledky plodných těchto úvah geometrických byly za krátkou dobu velmi hojné, takže se brzo dostavilo stadium, kdy bylo možno kriticky prohlédnout výsledky a nový obor geometrický osamostatnit. To učinil kolem r. 1850 Staudt. Vycházeje od harmonické vlastnosti úplného čtyrrohu, kterou lze odvodit prostým protínáním z úvah prostorových, definoval Staudt projektivnost jako korespondenci obapolně jednoznačnou, při níž zůstává zachována harmoničnost čtveřin prvků, a mohl odtud vybudovati projektivní geometrii nezávisle na metrickém pojmu dvojpoměru; kuželosečku definoval zcela obecně jako soustavu prvků incidentních s prvky v rovinné polárnosti sdruženými; pro úvahy v elementech imaginárních podal ryze geometrické vyjádření jejich v eliptické involuci, rozlišuje oba komplexní prvky sdružené dvojím smyslem útvaru; konečně také začátky konstruktivního zavedení souřadnic jsou jeho zásluhou.

Počínaje Ponceletem a konče Staudtem byly podány hlavní myšlenky geometrie projektivní. Dalšími pracemi bylo jednak pokračováno na těchto základech, čímž nahromaděno množství nových poznatků, jednak se projektivní geometrie vyvíjela ve shodě s ostatním badáním mathematickým několika směry tak, že se její obraz dosti změnil.

2. Protože projektivní geometrie vyšetřuje ty vlastnosti geometrických útvarů, jež se nemění při promítání, předpokládá znalost promítání a transformací projektivních vůbec. Vskutku byla projektivním korespondencím věnována pozornost od počátků této geometrie. Později pak, když se poznával základní význam transformací pro celou geometrii a když při studiu rozmanitých transformací složitějších objevily se transformace projektivní svojí jednoduchostí jako zvlášť důležité, byly tyto nejpřístupnější transformace soustavně studovány. V geometrických úvahách novější doby zaujímají transformace projektivní místo velmi rozsáhlé.

V systému projektivní geometrie žádá současný stav její postaviti projektivní transformace do středu celého oboru; uspořádáme-li základní útvary projektivní geometrie, jak je přirozené, podle řádu, jest tedy nutno nejprve definovati a vyšetřovati projektivnost základních útvarů jednomocných, potom kollineace a korrelace útvarů dvojmocných a trojmocných. Postupujíce od obecného k speciálnímu, budeme zkoumati napřed transformace útvarů v libovolné poloze vzájemné, potom útvarů soumístných; při útvarech řádu druhého a třetího předchází ovšem studium kollineace úvaze o korrelaci.

Při vyšetřování projektivních transformací útvarů soumístných je látka velmi bohatá. Jest především řešiti otázku samodružných elementů; podle útvarů samodružných rozliší se pak všechny možné typy uvažované projektivnosti. Při kollineaci v rovině obrátí se tak pozornost zejména k homologii, při kollineaci v prostoru k osové a dvojosé kollineaci i k homologii jako k typům projektivně speciálním a důležitým. Po projektivnosti, jež se různí od své inversní transformace, studujeme projektivnost involuční, jejíž dvojmoc je transformace identická; involučním korespondencím projektivním byla odedávna právem věnována zvýšená pozornost, zejména také involučním korrelacím v rovině i v prostoru. Jdouce tímto směrem dále, vezmeme v úvahu projektivnosti periodické, jejichž vyšší mocnina jest identická. V celém tomto oboru úvah nalezena byla řada cenných výsledků.

Po transformacích projektivních jest možno pohodlně studovati útvary, na jejich podkladě odvozené z útvarů základních. Při tom lze užívati dvou zákonů výtvarných: útvar vzniká buď jako soustava elementů, v nichž se protínají prvky, odpovídající sobě v dané projektivnosti útvarů základních nebo odvozených nebo jejich systémů (dvou nebo tří, všechny nebo některé), nebo jako soustava prvků incidentních s prvky korespondujícími. Vlastnosti nalezené odtud zejména pro odvozené útvary nejjednodušší (hlavně druhého stupně) jsou neobyčejně hojné, a jejich výběr tvořil od počátku hlavní obsah elementární geometrie projektivní.

Jestliže byly vyšetřeny jednotlivé transformace projektivní (podle řádu, podle druhu prvků sobě odpovídajících, podle typů, také involuční a periodické), jest dalším krokem zkoumání jejich produktů a zejména vyšetřování jejich grup. Nauka o grupách transformací geometrických, aplikována na transformace projektivní, vykazuje zde jak jednoduché, tak zajímavé výsledky, jednak u grup s konečným počtem členů, jednak v oboru grup kontinuitních. Vedle skladby grup obrací se při tom pozornost nejen k prvkům neproměnným při celé grupě nebo její části, nýbrž i k útvarům (čarám, plochám a j.) invariantním; útvary toho druhu získávají tím ovšem na svém významu.

3. Geometrické transformace mají pro geometrii základní význam jako prostředek třídicí a charakterisační: podle Kleinova prin-

cipu (z r. 1872) jest totiž možno geometrické úvahy roztříditi do skupin tak, že každá obsahuje úvahy o vlastnostech, invariantních při určité grupě transformací. Tak jest projektivní geometrie vůči ostatním směrům geometrického vyšetřování charakterisována svou grupou transformací projektivních. Všechny útvary a vlastnosti útvarů, jež se při projektivních transformacích mění, mají tedy z geometrie projektivní býti vyloučeny.

Avšak speciálnější útvary geometrické a vlastnosti útvarů, jež nejsou invariantní při transformacích projektivních, jsou invariantní aspoň při užší grupě transformací. A jsou zde dva stupně: buď platí nepromĕnnost při grupě transformací affinních nebo při grupě transformací podobnostních (jež zahrnuje transformace pohybové). Podle toho existuje vedle geometrie projektivní obsáhlejší geometrie affinní a ještě obsáhlejší geometrie podobnostní (ekviformní, elementární, obyčejná). Vedle incidence prvků geometrických, která jedině zůstává neporušena v geometrii projektivní a jest tam tedy předmětem úvah, mluvíme v geometrii affinní ještě o rovnoběžnosti, v geometrii podobnostní také o kolmosti. Obě uvedené soustavy geometrických útvarů a vět lze však přece zařadit do projektivní geometrie tím způsosem, že vyhradíme v geometrických úvahách zvláštní místo prvkům v nekonečnu nebo ještě t. zv. absolutnímu útvaru v nekonečnu a že studujeme projektivní vlastnosti geometrických útvarů ve spojení s těmito zvláštními útvary.

Podle této situace věcné nelze v geomerii projektivní jako samostatné vědě mluviti o délce úseček (obsahu, objemu) a o velikosti úhlů; nelze na předním místě mluviti o transformacích affinních a podobnostních ani o útvarech obsahujících elementy rovnoběžné nebo kolmé, nýbrž nejvýše jako o metrických specialisacích transformací a útvarů projektivních. Pokud jde o velikost úseček a úhlů, vzniká tím jakási obtíž v samých začátcích nauky, která je hlavně při elementárním výkladu věci nepříjemná; je to ovšem obtíž přirozená, protože útvary a věty obyčejné geometrie tvoří naše první poznatky, a obsah geometrie projektivní je vyšším stupněm geometrického poznání. Připojí-li se affinní i podobnostní transformace a příslušné útvary i jejich vlastnosti jako neprojektivní specialisace předmětů projektivních, jest v tom dvojí zisk methodický: jednak vynikne krásná souvislost mezi obecnými poznatky projektivními a speciálními větami geometrie t. zv. metrické (se zřetelem k útvarům v nekonečnu), jednak uvede se do velmi četných těchto metrických transformací, útvarů a vlastností systém, který usnadní jejich přehled a objasní jejich správný význam.

Toto pojímání a uspořádání projektivní geometrie jest ovšem jiné, než vychází z historického vývoje a z potřeby aplikací. Jest to však vědecká soustava, o jejíž přednostech není se třeba šířiti; historický vývoj šel jako zpravidla obráceně od speciálního k obecnému, od konkretního k abstraktnímu, a konečný stav vědy se nebude na něj ohlížet; aplikace pak, zejména geometrie deskriptivní, od níž se projektivní geometrie dávno osamostatnila, vyberou si věci potřebné a uvedou je způsobem pro sebe vhodným; konečně také zřetel didaktický může vésti k jinému postupu při úvodním výběru látky z geometrie projektivní.

4. Aby soustavná geometrie projektivní vybudována byla způsobem, který je v novější kritické době cílem ve všech oborech matematických, jest nutno učiniti základem systém nejjednodušších skutečností, z něhož lze vše ostatní odvoditi postupem pouze logickým; při tom jest podle předcházející úvahy toho dbáti, aby zachována byla samostatnost projektivní geometrie vůči geometrii obyčejné, aby tedy nebylo nikde užito pojmů metrických.

O vhodné soustavě základních pojmů a vět pro geometrii vůbec a spec. pro geometrii projektivní bylo v poslední době hojně uvažováno; jest možno rozlišiti v tomto směru školu německou a italskou, po případě americkou. Vycházejíce od omezené části prostoru podali základy projektivní geometrie zejména Pasch a Schur; abstrakcí zrakového názoru nalezli úplný systém postulátů pro geometrii projektivní Enriques a Pieri; z úvah dále sahajících jest vytknouti hlavně práce Veblenovy. Při redukci pojmů a vět geometrických na základní (jež totiž přijímáme bez definice resp. bez důkazu) jest ovšem možna značná rozmanitost a lze jíti různě daleko. Rozhodně nesmějí základní pojmy a věty sobě navzájem odporovati a musí stačiti k definici a důkazu všech ostatních pojmů a vět. Bylo by formálně pěkné, kdyby tyto prvky geometrických úvah tvořily systém minimální, jsouce na sobě nezávislé; zde však jest potřebí rozvahy, aby základ geometrie nepozbyl názornosti.

Volíme-li při stanovení základních pojmů a postulátů rozumnou cestu střední, přijmeme za základní prvky bod, přímku a rovinu; základním vztahem dvou různojmenných prvků jest pak v geometrii projektivní incidence jejich. První skupina postulátů projektivní geometrie týká se incidence prvků základních: dva různé body nebo roviny určují přímku s nimi incidentní; tři různé body nebo roviny, neincidentní s touže přímkou, určují rovinu resp. bod s nimi incidentní; bod nebo rovina a přímka neincidentní určují rovinu resp. bod s nimi incidentní. Jako základní útvary geometrie projektivní zavedeme devět soustav základních prvků pomocí incidence složených: každý z elementů skládá tři útvary základní; tři jsou jednomocné, čtyři dvojmocné a dva trojmocné. Postuláty první skupiny umožňují dva základní výkony geometrie projektivní, totiž promítání a protínání. Prohlídkou uvedených postulátů, zjednodušených na podstatný obsah, poznáváme, že lze pro celou geometrii na nich založenou vysloviti obecný zákon duálnosti: každá věta geometrie projektivní zůstává v platnosti, jestliže v ní zaměníme slovo bod slovem rovina a obráceně. Z obecného zákona duálnosti, platného pro útvary v prostoru, lze hned vyvoditi dva užší zákony duálnosti pro útvary soustavy rovinné a pro útvary svazku prostorového.

K uvedenému se přimykají Desargovy věty o trojúhelnících (různých rovin, téže roviny), pro další postup nezbytné. Druhá skupina postulátů projektivní geometrie týká se uspořádání elementů v základních útvarech jednomocných: vytčením prvku stane se útvar uspořádaným; cyklickou záměnou prvků obdržíme útvar s daným souhlasně uspořádaný, čímž stanoven jeden z obou možných smyslů útvaru; uspořádání a smysl základního útvaru jednomocného se promítáním a protínáním nemění; konečně dlužno vysloviti, že mezi dvěma různými prvky útvaru jednomocného existuje neomezeně mnoho prvků. Zbývá připojiti k oběma uvedeným skupinám postulátů na třetím místě postulát, vyjadřující spojitost základních útvarů jednomocných (třebas ve tvaru, jenž je geometrickým výrazem arithmetického postulátu Dedekindova). Na tomto systému jako základě lze vystavěti celou geometrii projektivní v prostoru trojrozměrném; pro rovinnou geometrii projektivní omezíme se ovšem na postuláty týkající se útvarů rovinných, nelze se však obejíti bez prostorového důkazu věty Desargovy.

Východiskem vlastních úvah geometrie projektivní jest potom definice projektivnosti útvarů jednomocných. Z rozmanitých výměrů, jež tu byly podány a přijímány, jest vyloučiti definici vycházející od perspektivnosti pohybem porušené, z téhož důvodu definici opírající se o dvojpoměr metricky zavedený; pro elementární ráz počátků geometrie projektivní není dost případná definice analytická, jinak ovšem bezvadná. Definice Staudtova, užívající vedle jednoznačné korespondence harmonických čtveřin, je jistě velmi dobrá; přes to jest asi dáti přednost definici Cremonově a zavésti projektivnost základních útvarů prvního řádu jako produkt konečného počtu perspektivností. Zdá se totiž, že tato definice vystihuje lépe charakter celé geometrie projektivní. Po úvaze k definici se připínající jest na místě vzíti v úvahu čtyrrohové skupiny prvků a spec. skupiny harmonické; odtud dospějeme pak k hlavní větě o projektivnosti (o existenci projektivnosti, v níž třem prvkům jednoho základního útvaru jednomocného odpovídají tři libovolné prvky druhého útvaru). Kollineaci a korrelaci základních útvarů řádu druhého a třetího jest pak přirozeno definovati jednoznačnou korespondencí prvků incidentních, z níž bezprostředně vyvyplývá projektivnost obsažených útvarů základních řádu prvního.

5. Když na podkladě souřadnic zobecněny byly geometrické úvahy o útvarech obyčejného prostoru na útvary o libovolném počtu rozměrů, vyvinovala se všemi obvyklými směry geometrie prostoru n-rozměrného. Konstruktivní cestou začal pěstovati projektivní geometrii polydimensionální r. 1882 Veronese; četnými pracemi zbudovali zakrátko obsáhlou theorii zejména italští geometři Segre, Bertini a j. Úvahy o projektivní geometrii prostoru n-rozměrného tvoří nyní významnou část geometrie projektivní; zdá se však, že není (zatím) vhodné zavádět hned na počátku hledisko tak obecné.

Postup v úvahách projektivní geometrie n-rozměrné jest přirozeně obdobný jako v geometri prostoru trojrozměrného: po zavedení prostoru n-rozměrného a po úvahách o prostorech v něm obsažených jest možno vysloviti obecný zákon o duálnosti; následují úvahy o projektivnosti dvou prostorů vícerozměrných vůbec, potom o kollineaci a korrelaci prostorů soumístných; po projektivních transformacích nastupuje vyšetřování rozmanitých variet odvozených ([n—1]-rozměrných, spec. kvadratických, jednorozměrných, dvojrozměrných a jiných).

Přednosti polydimensionální geometrie projektivní jsou značné. Úvahy geometrické nabývají zde obecnosti, která je sama o sobě vítaná; neboť obecné stanovisko, třebas abstraktní, má ve vědě vždy vyšší cenu. Geometrie n-rozměrná poskytuje mnohem pronikavější pochopení geometrických zákonů u variet obyčejných; zejména rozdíly mezi útvary prostorovými a rovinnými objevují se v jasném osvětlení. Mimo to je projektivní geometrie prostorů vícerozměrných velmi užitečná jako pomůcka geometrického vyšetřování, také v oborech složitějších (v geometrii transformací biracionálních a jinde).

Úvahy projektivní geometrie rozšířeny byly v novější době ještě několika směry. Buďtež jen stručně připomenuty četné snahy o geometrickou formulaci i odvození theorií algebraických, geometrické stanovení i vyšetřování útvarů imaginárních a zobecnění korespondencí projektivních na obecný počet zúčastněných prvků. Jestliže methody diferenciální docílily v obyčejné geometrii výsledků tak bohatých a cenných, lze očekávati, že také infinitesimální geometrie projektivní, jež je zatím v počátcích, přinese projektivní geometrii mnoho nového.

6. Projektivní geometrii lze pěstovati methodou konstruktivní čili synthetickou i methodou početní čili analytickou. S počátků konány byly úvahy projektivní geometrie většinou syntheticky; v tom smyslu byly také položeny základy této geometrie a to způsobem velmi jednoduchým, jenž snadno dosáhl velikých výsledků. Značí proto založení projektivní geometrie nový rozkvět synthetické methody geometrické, jež od dob starověkých mohla ukázati jen podružné výsledky a v nové době byla methodou analytickou do pozadí zatlačena. Pozdější vývoj geometrie projektivní je provázen protivou obou method: snahy o ryze konstruktivní methodu celé této geometrie vedly mimo cenné úspěchy také k některým úvahám umělým, kdežto methoda analytická zacházela i k složitým útvarům algebraickým, při nichž geometrický obsah téměř zanikal. Dosud pak má převahu methoda synthetická, třebas ne vždy ryzí, takže geometrií projektivní rozumí se obyčejně synthetická geometrie projektivní; jest to způsobeno vývojem, vhodností methody té pro elementy projektivní geometrie a významem této nauky pro geometrické konstrukce.

Při samostatném budování projektivní geometrie nezávisle na pojmech metrických vzniká zásadní otázka, jak zavésti pro methodu analytickou souřadnice bez pojmu délky. Konstruktivní řešení této věci patří k největším úspěchům novější geometrie projektivní; projektivní zobecnění základních výkonů arithmetických, geometricky prováděných, dovoluje definovati na základě úplného čtyrrohu součet, rozdíl, součin a podíl ryze geometricky, a když byla třem prvkům v základním útvaru jednomocném přiřaděna čísla 0, 1 a ∞, stanoviti se zřetelem k základním zákonům arithmetickým jednoznačnou korespondenci mezi geometrickými prvky a čísly. Dbáme-li o nezávislost projektivní geometrie na geometrických směrech speciálnějších, jí podřaděných, nemusí tedy analytická methoda vésti k porušení této zásady.

Vezmeme-li v úvahu přiměřenost a účinnost obou method v projektivní geometrii, jakož i nedostatky jejich, rozhodneme se asi, hledíce také k nynějšímu stavu nauky, pro kombinaci obou: synthetická methoda je velmi vhodná pro začátky geometrie projektivní a také pro četné další úvahy, pokud však nejsou příliš složité; methoda analytická ovládne proti tomu snáze a bezpečněji vztahy složitější a útvary vyšší. Neboť methoda synthetická je svou přímostí zajisté přirozenější pro počáteční úvahy geometrické vůbec, tím více pak pro základy projektivní geometrie, a dociluje názorně i rychle pěkných výsledků ve velmi rozsáhlé části geometrie projektivní; stává se však poněkud těžkopádnou, někdy i méně obecnou a spolehlivou v úvahách složitějších. Analytická methoda může se zejména tam uplatniti, kde přestávají přednosti methody synthetické. Chceme-li v tomto smyslu užíti obou method, jest ovšem potřeba dbáti už od počátku vedle synthetické methody také methody analytické; jest to ostatně pro celou geometrii projektivní výhodné, jsou-li její výsledky osvětlovány dvojí cestou.

*

Sur la géométrie projective.

(Extrait de l'article précédent.)

En rappelant le centenaire du „Traité des propriétés projectives des figures“ de Poncelet, et l'état actuel de cette branche de la science, l'auteur esquisse les traits essentiels de la géométrie projective actuelle, pour construire une image synthétique de cette science.

Dans la géométrie projective moderne, on attache une attention considérable et systématique à l'étude des transformations projectives — notamment pour les figures d'un même espace — et, en particulier, de leurs groupes. Les transformations géométriques sont non seulement le centre des considérations de cette discipline, mais elles distinguent aussi ces considérations de celles des autres branches de la géométrie, notamment de la géométrie de l'affinité et de la similitude; il faut épurer la vraie géométrie projective des considérations de ces géométries spéciales. La géométrie projective scientifique doit être fondée sur un système de notions et de théorèmes fondamentaux; un choix modéré introduit comme éléments fondamentaux le point, la droite et le plan, comme relation fondamentale leur incidence; des trois groupes de postulats le premier concerne l'incidence des éléments fondamentaux, le deuxième l'arrangement des éléments dans les figures fondamentales à une dimension, le troisième la continuité de ces figures. De toutes les définitions de l'homographie il faut considérer comme la plus convenable celle par laquelle l'homographie à une dimension est introduite comme le produit d'un nombre fini d'homologies. Une place large et importante occupent, dans la géométrie projective moderne, les considérations polydimensionales. On peut faire la géométrie projective par la méthode constructive ou bien par la méthode analytique; celle-là se prête mieux aux considérations élémentaires, celle-ci aux figures plus compliquées, mais c'est la combinaison des deux méthodes qui est la plus convenable. Il faut, bien entendu, introduire les coordonnées de la géométrie projective analytique sans des notions métriques.

Elektromagnetické vlny na dielektrickém drátu.

Frant. Záviška.

Že i na dielektrických drátech se mohou šířiti elektromagnetické vlny, ukázali Hondros a Debye[1]) integrací Maxwellových rovnic pro tento případ. Tyto vlny se ovšem značně liší od vln postupujících po vodivých drátech; Hondros a Debye nalezli, že vznikají jen tehdy, když kmitová perioda nepřesahuje určité meze závislé na dielektrické konstantě látky a na poloměru drátu, dále, že vlna odpovídající největší možné periodě šíří se po drátu s rychlostí světla ve vakuu a elektrické silokřivky stojí téměř kolmo k povrchu drátu. S klesající periodou klesá i rychlost těchto vln velmi rychle, současně slábne pole vně drátu, koncentrujíc se do jeho vnitřku. Při tom však vystupují postupně nové a nové vlny, jež se chovají podobně jako vlna první; jich rychlost je spočátku rovna rychlosti světla ve vakuu, pak klesá a pole jim odpovídající slábne. Experimentálně dokázal vznik elektromagnetických vln na dielektrických drátech (skleněné trubice naplněné vodou, methylalkoholem, nebo acetonem) Zahn.[2]) V celku potvrzují jeho měření výsledky teorie; pozorované odchylky dají se asi vyložiti tím, že některé zjednodu-

---

[1]) D. Hondros a P. Debye, Ann. d. Phys. 32, 465. 1910.

[2]) H. Zahn, Phys. ZS. 16, 414. 1915. Podle prací Rütera a Schrievera.