point double correspondent, sur K, les points circulaires, on voit facilement que les points d'inflexion de C correspondent a trois points i, qui sont, sur K, les sommets d'un triangle isoscèle. Aux points d'intersection de C avec une courbe du n-ième ordre correspondent $3n$ points sur K, dont les distances, mésurées sur le cercle, d'un point i, ont la somme toujours égale à un multiple de la longueur de la circonférence. On est conduit, par là, à une série de problèmes. Si, p. ex., φ est la distance angulaire du point i de l'image d'un point arbitraire, celle de l'image du point tangentiel est -2φ, du second point tangentiel 4φ etc., de l'nième $(-2)^n\varphi$. „Si ce dernier coïncide avec le premier, on obtient l'image d'un polygone inscrit, et circonscrit en même temps à la courbe C. Pour que cela arrive, il faut que $\varphi + 2k\pi = (-2)^n\varphi$ [k entier], ou bien

$$\varphi = \frac{2k\pi}{(-2)^n - 1}$$

C'est ainsi, p. ex., que les arcs de -40°, -80°, -160° déterminent les sommets d'un triangle ayant la propriété demandée, etc.

Přirozené rovnice křivky trojnásobně zakřivené v prostoru čtyrrozměrném.

Napsal Dr. *Jos. Žďárský*.

1. Uvažujme ve čtyrrozměrném (Euklidově) prostoru Ω_4 libovolnou křivku. Běžný bod R na křivce stanoven jest vektorem $\overline{OR} = \mathfrak{r}$. Oskulační rovina v bodě R a další bod křivky určují třírozměrný prostor, jehož limitní polohu Ω_3 nazvu „prostor oskulační". Kolmice k oskulačnímu prostoru nazývá se „trinormála". Značí-li $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ vektorové jednotky tečny, hlavní normály, binormály a trinormály a označíme-li derivace dle oblouku s křivky akcentem, dostaneme pro základní čtyrhran formule analogické formulím Frenetovým

$$\mathfrak{t}' = \frac{1}{\varphi}\,\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}' = -\frac{1}{\varphi}\,\mathfrak{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v}' = \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{u} + \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w}' = -\frac{1}{\omega}\,\mathfrak{v} \qquad (1)$$

Rovnicemi

$$\frac{1}{\varphi} = \alpha, \quad \frac{1}{\tau} = \beta, \quad \frac{1}{\omega} = \gamma \qquad (2)$$

kde α, β, γ jsou známé, funkce oblouku jest křivka, až na svoji polohu, úplně definována a zoveme je proto *„přirozené rovnice křivky"*.

Abychom to dokázali, uvažujme dvě čáry, které vyhovují rovnicím (2). Základní čtyrhran $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ první křivky v bodě R_1 ($\overline{OR_1} = \mathfrak{r}_1$) a základní čtyrhran $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$ v příslušném bodě R_2

$(\overline{OR}_2 = \mathfrak{r}_2)$ druhé křivky liší se jen polohou, pročež můžeme psáti

$$\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{F}\,\mathfrak{t}_1\,,\quad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{F}\,\mathfrak{u}_1\,,\quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{F}\,\mathfrak{v}_1\,,\quad \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{F}\,\mathfrak{w}_1 \qquad (a)$$

kde $\mathfrak{F}$ značí lineárnou formu (tensor), která zprostředkuje přemístění čtyrhranu $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ do polohy $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$. Derivováním dle společného oblouku obou čar plyne z první rovnice

$$\mathfrak{t}'_2 = \mathfrak{F}'\,\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{F}\,\mathfrak{t}'_1$$

čili vzhledem k formulím (1, 2)

$$\alpha\,\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{F}'\,\mathfrak{t}_1 + \alpha\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{u}_1$$

t. j. vzhledem ke druhé z rovnic *(a)*

$$\mathfrak{F}'\,\mathfrak{t}_1 = \theta.$$

Podobně dostaneme z ostatních rovnic *(a)*: $\mathfrak{F}'\mathfrak{u}_1 = \theta$, $\mathfrak{F}'\mathfrak{v}_1 = \theta$, $\mathfrak{F}'\mathfrak{w}_1 = \theta$; a ježto forma $\mathfrak{F}'$ vymizí pro čtyři vzájemně kolmé vektory, musí vymizeti identicky, t. j. $\mathfrak{F} = \text{const.}$ Dle toho můžeme první křivku umístiti tak, aby

$$\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_1\,,\quad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1\,,\quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1\,,\quad \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_1\,.$$

Znásobíme-li první z těchto rovnic obloukovým elementem (který jest pro obě křivky stejně veliký), dostaneme

$$d\,\mathfrak{r}_2 = d\,\mathfrak{r}_1 \quad \text{t. j.} \quad \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{a}.$$

Konstantní vektor $\mathfrak{a}$ představuje translaci a obě uvažované čáry liší se tedy jen polohou, čímž žádaný důkaz proveden.

2. Přejdu nyní k integraci přirozených rovnic (2). Daným vektorem $\mathfrak{a} + i\,.\,\mathfrak{b}$ délky nullové ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jsou vektorové jednotky vzájemně kolmé) jest možno proložiti jedinou rovinu, která protíná v přímce současně rovinu ($\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$) a rovinu ($\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$). Jednotky

$$\cos\varphi\,.\,\mathfrak{t} + \sin\varphi\,\mathfrak{u}\,,\quad \cos\psi\,\mathfrak{v} + \sin\psi\,.\,\mathfrak{w}$$

průsečnic stojí na sobě kolmo, takže lze psáti

$$\cos\varphi\,.\,\mathfrak{t} + \sin\varphi\,.\,\mathfrak{u} + i\,(\cos\psi\,\mathfrak{v} + \sin\psi\,\mathfrak{w}) = \varepsilon\,(\mathfrak{a} + i\,\mathfrak{b}) \qquad (\mathrm{I.})$$

kde φ, ψ, ε jsou dosud neurčené funkce oblouku s. Derivováním získáme vzhledem k (1, 2)

$$\begin{gathered}(-\sin\varphi\,\mathfrak{t} + \cos\varphi\,.\,\mathfrak{u})\,.\,\varphi' + i\,(-\sin\psi\,\mathfrak{v} + \cos\psi\,\mathfrak{w})\,.\,\psi' + \\ + \alpha\cos\varphi\,.\,\mathfrak{u} - \sin\varphi\,(\alpha\,\mathfrak{t} + \beta\,\mathfrak{v}) + i\cos\psi\,(\beta\,\mathfrak{u} + \gamma\,\mathfrak{w}) - \\ - i\sin\psi\,.\,\gamma\,.\,\mathfrak{v} = \varepsilon'\,(\mathfrak{a} + i\,.\,\mathfrak{b}).\end{gathered}$$

Koeficienty posledních dvou rovnic musí býti úměrné, pročež

$$\frac{-\varphi'\,.\sin\varphi - \alpha\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\varphi'\,.\cos\varphi + \alpha\cos\varphi + i\,\beta\cos\psi}{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{-i \,.\, \sin\psi \,.\, \psi' - \beta \,.\, \sin\varphi - i\gamma \sin\psi}{i \cos\psi} = \frac{i\cos\psi \,.\, \psi' + i\gamma\cos\psi}{i \sin\psi} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Z těchto čtyř rovnic jsou jen tři neodvislé, čtvrtá jest důsledkem ostatních. Jednoduchým výpočtem získáme

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi' + \alpha = -i \,.\, \beta \cos\varphi \cos\psi & \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = i \,.\, \beta \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\psi \\ \psi' + \gamma = -i\beta \sin\varphi \,.\, \sin\psi & \end{array}\right\} \text{(II.)}$$

Sečteme-li a odečteme-li první dvě rovnice získáme položíce

$$\varphi + \psi = \Theta, \quad \psi - \varphi = \Omega$$

rovnice

$$\left.\begin{array}{l} \Theta' + i\beta \cos\Theta + \alpha + \gamma = 0 \\ \Omega' - i\beta \cos\Omega + \gamma - \alpha = 0 \end{array}\right\} \text{(III.)}$$

Problém závisí na integraci těchto rovnic, které zavedením tangent polovičních úhlů převésti lze ve tvar rovnic Riccatiho. Známe-li φ, ψ dostaneme ε z poslední z rovnic (II.) kvadraturou. Jsou-li $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ vzájemně kolmé jednotky vektorové, bude také

$$\cos\varphi_1 \,.\, \mathfrak{t} + \sin\varphi_1 \,.\, \mathfrak{u} + i\,(\cos\psi_1 \,.\, \mathfrak{v} + \sin\psi_1\, \mathfrak{w}) = \varepsilon_1\,(\mathfrak{c} + i\,\mathfrak{d}) \quad (\text{I}^*)$$

kde φ_1, ψ_1, ε_1 jsou řešení rovnic (II.), která se od řešení φ, ψ, ε liší jen tím, že integrační konstanty mají jinou, dosud neurčenou hodnotu. Separováním reálné a imaginárné části v rovnicích (I, I*) plynou celkem čtyři rovnice vzhledem k $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ lineárné a z nich řešením získáme $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ Stanovíme-li potom integrační konstanty tak, aby vyhověno bylo podmínkám $|\mathfrak{t}| = |\mathfrak{u}| = |\mathfrak{v}| = |\mathfrak{w}| = 1$ a podmínkám orthogonality těchto vektorů, jest problém řešen, neboť

$$\mathfrak{r} = \int_0^s \mathfrak{t} \,.\, d\,s.$$

*

Les équations naturelles de la courbe à triple courbure dans l'espace à quatre dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

Démonstration, au moyen de l'analyse vectorielle, du théorème qui dit que la courbe, dont il est question, est déterminée, à sa position près, par ses équations naturelles. La simplicité de cette démonstration fait voir les avantages rendus par l'emploi de l'algèbre des tenseurs. La résolution des équations naturelles se réduit à celle de deux équations de Riccati.