tiroir dans une position déterminée par rapport au transparent et nous resolvons l'équation du type donné. Je déduis quelques formules pour des types fondamentaux des règles de cette espèce et je renvois en même temps à mon article „Les abaques à plusieurs plans superposés“ (t. LI de ce journ.), où l'on trouve une figure schématique d'une règle à calcul pour l'équation de Kepler. On peut, en effet, considérer les règles à superposition comme un cas particulier des abaques à plusieurs plans superposés.

Vektorová analyse a integrální rovnice.

Napsal *Bohuslav Hostinský*.

1. Nauka o integrálních rovnicích podává jednotnou methodu pro velikou řadu rozmanitých problémů. Vyjděme od nejjednodušší úlohy sem spadající: řešiti soustavu n lineárních rovnic

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

o n neznámých $x_1, x_2 \ldots x_n$. Tato úloha zahrnuje v sobě, je-li n nekonečně veliké, rozličné úlohy, jež se týkají integrace differenciálních rovnic lineárních (obyčejných i parciálních) libovolného řádu za daných krajových podmínek, jakož i obecných rovnic integrálních lineárních.

V jednotlivých případech jest redukce úloh daných differenciálními rovnicemi na úlohy algebraické známa již ze starších dob (Lagrangeova theorie struny jakožto útvaru složeného z konečného počtu hmotných bodů, Fourierova theorie tepelné vodivosti ve hmotách složených z konečného počtu molekul atd.). Avšak teprve Fredholmova theorie integrálních rovnic umožnila řešiti soustavně všechny úlohy toho druhu methodami obdobnými známým methodám, jimiž se řeší soustava rovnic (1).

Fredholm ukázal též, že soustava lineárních integrálních rovnic dá se jednoduchým způsobem převésti na jedinou integrální rovnici (viz níže, odst. **4.**).

Mějme ku př. tři integrální rovnice pro tři neznámé funkce a považujme tyto funkce za složky neznámého vektoru. Dané tři rovnice mohou býti převedeny buď na jedinou skalární integrální rovnici (zmíněnou methodou Fredholmovou), aneb na jedinou vektorovou integrální rovnici (viz odst. **5.**). Je velice pozoruhodno, že obě tyto rovnice jsou formálně stejné; celý výpočet, kterým se úloha řeší na základě Fredholmovy methody, je formálně stejný s výpočtem, kterého je třeba k řešení úlohy užitím vektorové analyse. Myslím, že tato souvislost není známa; v následujících řádcích vyložím ji vycházeje z jednoduché úlohy algebraické.

2. Algebraická úloha, kterou se budeme nyní zabývati, liší se toliko formální úpravou od úlohy vyjádřené rovnicemi (1). V rovnicích provedeme postupně tyto změny:

První změna záleží v tom, že položíme $n = 3m$, kde m značí celé číslo a rozdělíme neznámé $x_1, x_2 \ldots x_n$ ve tři skupiny: v prvé skupině bude m neznámých, které označíme písmenami u píšíce

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \ldots \ldots x_m = u_m,$$

ve druhé skupině bude m neznámých, jež označíme písmenami v kladouce

$$x_{m+1} = v_1, \quad x_{m+2} = v_2, \ldots \ldots x_{2m} = v_m,$$

a zbývajících m neznámých ve třetí skupině označíme písmenami w, takže

$$x_{2m+1} = w_1, \quad \alpha_{2m+2} = w_2, \ldots \ldots x_{3m} = w_m.$$

Druhá změna záleží pak v tom, že zavedeme koefficienty c_{ikpq}, které budou s konstantami a_{pq} souviseti takto:

$$a_{pp} = 1 + \lambda h c_{ikpp}, \quad a_{pq} = \lambda h c_{ikpq} \text{ pro } p \neq q.$$

Indexy i a k nabývají hodnot $1, 2, 3$, indexy p a q pak hodnot od 1 do m; způsob označení vysvítá z rovnic (2). Písmeno λ značí konstantní parametr a h veličinu, kterou necháme později konvergovati k nulle.

Je-li $\lambda = o$, redukují se rovnice (1) v novém označení na

$$u_1 = b_1, \quad u_2 = b_2, \ldots u_n = b_m, \quad v_1 = b_{m+1}, \ldots w_{3m} = b_{3m}.$$

Je-li však obecně $\lambda \neq o$, nabývají rovnice (1) v novém označení tvaru

$$\left.\begin{array}{l}
u_1 + \lambda (h \sum_{s=1}^{m} c_{111s} u_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{121s} v_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{131s} w_s) = b_1 \\
u_2 + \lambda (h \sum_{s=1}^{m} c_{112s} u_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{122s} v_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{133s} w_s) = b_2 \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — — — —} \\
v_1 + \lambda (h \sum_{s=1}^{m} c_{211s} u_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{221s} v_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{231s} w_s) = b_{m+1} \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — — — —} \\
w_1 + \lambda (h \sum_{s=1}^{m} c_{311s} u_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{321s} v_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{331s} w_s) = b_{2m+1} \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — — — —} \\
w_m + \lambda (h \sum_{s=1}^{m} c_{31ms} u_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{32ms} v_s + h \sum_{s=1}^{m} c_{33ms} w_s) = b_{3m}
\end{array}\right\} (2)$$

Mysleme si tyto rovnice rozřešeny podle neznámých $u_1, u_2 \dots v_1 \dots w_1 \dots w_m$; každá neznámá bude vyjádřena zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel budou mnohočleny v λ.

3. Budiž (α, β) intervall, v němž se pohybuje nezávisle proměnná reální veličina x. V tomto intervallu vytkneme m dělících bodů (první z nich splývá s α) $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ a považujeme veličiny u_s, v_s a w_s za hodnoty tří funkcí $u(x)$, $v(x)$ a $w(x)$ v těchto dělících bodech, tedy

$$u_s = u(\xi_s), \quad v_s = v(\xi_s), \quad w_s = w(\xi_s).$$

Podobně považujeme veličiny c_{ikrs} za hodnoty, kterých nabývají funkce $c_{ik}(x, y)$ dvou proměnných pro $x = \xi_r$, $y = \xi_s$. Předpokládejme ještě, že intervall (α, β) je dělen body ξ_i ekvidistantně a že

$$\xi_{i+1} - \xi_i = h, \text{ kde } \lim h = o \text{ pro } m = \infty.$$

Podle známé definice integrálu obdržíme

$$\lim_{h=o} \left(h \sum_{s=1}^{m} c_{i1rs} u_s\right) = \int_\alpha^\beta c_{i1}(\xi_r, y)\, u(y)\, dy$$

$$\lim_{h=o} \left(h \sum_{s=1}^{m} c_{i2rs} v_s\right) = \int_\alpha^\beta c_{i2}(\xi_r, y)\, v(y)\, dy$$

$$\lim_{h=o} \left(h \sum_{s=1}^{m} c_{i3rs} w_s\right) = \int_\alpha^\beta c_{i3}(\xi_r, y)\, w(y)\, dy.$$

Prvních m rovnic (2) přejde pro $\lim h = o$ v rovnice, které můžeme shrnouti v jedinou:

$$u(\alpha) + \lambda \left[\int_\alpha^\beta c_{11}(x, y)\, u(y)\, dy + \int_\alpha^\beta c_{12}(x, y)\, v(y)\, dy + \right.$$
$$\left. + \int_\alpha^\beta c_{13}(x, y)\, w(y)\, dy \right] = f(x) \qquad (3)$$

Podobně přejde druhých m rovnic (2) v

$$v(x) + \lambda \left[\int_\alpha^\beta c_{21}(x, y)\, u(y)\, dy + \int_\alpha^\beta c_{22}(x, y)\, v(y)\, dy + \right.$$
$$\left. + \int_\alpha^\beta c_{23}(x, y)\, w(y)\, dy \right] = g(x) \qquad (3')$$

a posledních m rovnic (2) v

$$w(x) + \lambda \left[\int_\alpha^\beta c_{31}(x, y)\, u(y)\, dy + \int_\alpha^\beta c_{32}(x, y)\, v(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_\alpha^\beta c_{33}(x, y)\, w(y)\, dy \right] = h(x) \qquad (3'')$$

Při tom značí x libovolný bod v intervallu (α, β), a f, g, h tři dané funkce proměnné x.

Naznačený limitní přechod vede tedy od soustavy n lineárních rovnic (2) k soustavě tří lineárních integrálních rovnic (3), (3′) a (3″) pro neznámé funkce u, v a w. Naopak můžeme považovati podle Fredholma každou soustavu lineárních rovnic integrálních za soustavu nekonečně mnohých lineárních rovnic tvaru (2).

4. Úloha vyjádřená rovnicemi (2) liší se od úlohy (1) jen označením, jen tím, že jsme původní neznámé x_k rozdělili ve tři skupiny: u_s, v_s a w_s. Avšak tento nepatrný formální rozdíl obou úloh stává se významným, jakmile provedeme limitní přechod v odst. 3. naznačený. Rovnice (2) vedou totiž k soustavě tří integrálních rovnic (3), (3′) a (3″), poněvadž jsme neznámé x_k rozdělili ve 3 skupiny. Provedeme-li však limitní přechod považujíce všechny veličiny neznámé za hodnoty jedné a téže funkce v intervallu, jenž je třikráte delší než intervally dříve (α, β), obdržíme jedinou integrální rovnici. Tak přicházíme k důležité větě Fredholmově: soustava integrálních rovnic dá se nahraditi jedinou rovnicí integrální.

Považujme nyní u, v a w za složky vektoru vzaté ve směrech os souřadných $Oxyz$; počáteční bod vektoru budiž (x, o, o). Soustava tří integrálních rovnic (3), (3′) a (3″) pro neznámé funkce $u(x)$, $v(x)$ a $w(x)$ v intervallu (α, β) dá se nahraditi jedinou rovnicí a to dvěma způsoby: buď methodou Fredholmovou aneb užitím vektorové analyse.

Začněme první methodou. Pro jednoduchost položíme $\alpha = o$, takže máme tuto soustavu tří integrálních rovnic:

$$\left.\begin{aligned}
u(x) + \lambda \int_o^\beta \Big[c_{11}(x,y)\, u(y) + c_{12}(x,y)\, v(y) + c_{13}(x,y)\, w(y) \Big] dy &= f(x) \\
v(x) + \lambda \int_o^\beta \Big[c_{21}(x,y)\, u(y) + c_{22}(x,y)\, v(y) + c_{23}(x,y)\, w(y) \Big] dy &= g(x) \\
w(x) + \lambda \int_o^\beta \Big[c_{31}(x,y)\, u(y) + c_{32}(x,y)\, v(y) + c_{33}(x,y)\, w(y) \Big] dy &= h(x)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Integrační proměnnou y budeme považovati za druhou souřadnici v rovině Oxy. Funkce $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$ jsou dány v intervallu (o, β) osy Ox; v témže intervallu hledáme průběh funkcí $u(x)$, $v(x)$ a $w(x)$. Funkce $c_{ik}(x, y)$ jsou pak definovány uvnitř čtverce sestrojeného v rovině Oxy nad základnou o délce β s vrcholy (o, o) a (β, o). Označme tento čtverec zkrátka $[1\ 1]$ a budiž obecně $[i\ k]$ čtverec, který obdržíme, posuneme-li $[1\ 1]$ ve směru o délku $(i-1)\beta$ a ve směru Oy o délku $(k-1)\beta$. Devět čtverců

$$[i\ k]\ ,\ i = 1,\ 2,\ 3;\quad k = 1,\ 2,\ 3,$$

tvoří dohromady čtverec, jehož strana má délku 3β. Budiž (x, y) libovolný bod v tomto velikém čtverci a (x_o, y_o) homologický bod ve čtverci $[1, 1]$. Definujme pak funkce $\varphi(x)$, $p(x)$ a $K(x, y)$ takto:

$\varphi(x) = u(x_o)$, je-li bod (x, y) ve čtverci [11], [21] nebo [31],
$\varphi(\alpha) = v(x_o)$, „ „ „ „ „ [12], [22] „ [32],
$\varphi(x) = w(x_o)$, „ „ „ „ „ [13], [23] „ [33],
$p(x) = f(x_o)$, „ „ „ „ „ [11], [21] „ [31],
$p(x) = g(x_o)$, „ „ „ „ „ [12], [22] „ [32],
$p(x) = h(x_o)$, „ „ „ „ „ [13], [23] „ [33],
$K(x, y) = c_{ik}(x_o, y_o)$ je-li bod (x, y) ve čtverci $[ik]$.

Za těchto předpokladů redukuje se soustava tří rovnic (4) na jedinou integrální rovnici*)

$$\varphi(x) + \lambda \int_o^{3\beta} K(x, y)\ \varphi(y)\ dy = p(x). \tag{5}$$

Výsledek je ten, že složky u, v a w hledaného vektoru v intervallu (o, β) vypočtou se řešením jediné integrální rovnice (5); neznámá funkce $\varphi(x)$, určená touto rovnicí jednoznačně v intervallu $(o, 3\beta)$, představuje v první jeho třetině (o, β) složku $u(x)$, ve druhé třetině $(\beta, 2\beta)$ složku $v(x)$ a v poslední třetině $(2\beta, 3\beta)$ složku $w(x)$.

5. Druhá methoda, které lze užíti k převodu soustavy rovnic (4) na rovnici jedinou, zakládá se na vektorové analysi. Označme jako dříve písmenami u, v, w složky nějakého vektoru, který nazveme A, a buďte u', v', w' složky nového vektoru A' určené rovnicemi

$$\begin{aligned} c_{11}\ u + c_{12}\ v + c_{13}\ w &= u' \\ c_{21}\ u + c_{22}\ v + c_{23}\ w &= v' \\ c_{31}\ u + c_{32}\ v + c_{33}\ w &= w'. \end{aligned}$$

Koefficienty c_{ik} tvoří matrix L o třech řádcích a o třech sloupcích; vektor A' nazýváme součinem této matrice a vektoru A, a píšeme symbolicky

$$A' = L \cdot A\ .$$

*) Redukce dá se provésti stejným způsobem pro soustavu n integrálních rovnic (*J. Fredholm:* Sur une classe d' équations fonctionnelles, Acta Mathematica t. *27*, p. 365-390; 1903).

Předpokládejme, že koefficienty c_{ik} jakož i složky vektoru A jsou funkcemi proměnné y. Vektor o složkách

$$\int_0^\beta \Big[c_{k1}(y)\, u(y) + c_{k2}(y)\, v(y) + c_{k3}(y)\, w(y) \Big]\, dy\,,\ (k = 1, 2, 3),$$

nazveme integrálem součinu $L\,.\,A$ a značíme jej

$$\int_0^\beta L(y)\,.\,A(y)\,.\,dy.$$

Závisejí-li koefficienty matrice L na další proměnné x, budou složky vektoru

$$\int_0^\beta L(x, y)\ A(y)\, dy$$

záviseti na proměnné x.

Zavedeme-li toto označení, dá se soustava tří rovnic (4) nahraditi jedinou vektorovou integrální rovnicí

$$A(x) + \lambda \int_0^\beta L(x, y)\, A(y)\, dy = F(x). \tag{6}$$

Zde značí $A(x)$ hledaný vektor o složkách $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$; $L(x, y)$ jest matrix složená z devíti funkcí $c_{ik}(x, y)$ a $F(x)$ je vektor, jehož složky jsou $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$.

6. Srovnejme nyní obě methody, resp. rovnice (5) a (6). Je známo, že rovnice (5) dá se rozřešiti postupnými approximacemi: dosadíme do integrálu, jenž se vyskytuje na pravé straně rovnice (5), na místo $\varphi(y)$ výraz plynoucí z té rovnice, totiž

$$\varphi(y) = -\lambda \int_0^{3\beta} K(y, z)\ \varphi(z)\ dz + p(y), \tag{5a}$$

čímž obdržíme

$$\varphi(x) = p(x) - \lambda \int_0^{3\beta} K(x, y)\, p(y)\, dy + \lambda^2 \int_0^{\beta 3} K(x, y)\, dy \int_0^{3\beta} K(y, z)\ \varphi(z)\, dz.$$

Do posledního integrálu dosadíme na místo $\varphi(z)$ příslušný výraz plynoucí z rovnice (5) atd. Vychází

$$\varphi(x) = p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \int_0^{3\beta}\int_0^{3\beta} \dots \int_0^{3\beta} K(x, y_1)\, K(y_1, y_2) \dots \times$$

$$\times K(y_{n-1}, y_n) \dots p(y_n)\ dy_1\ dy_2 \dots dy_n. \tag{7}$$

Rovnice (6) má stejný tvar jako rovnice (5); vektor $A(x)$ vyhovující rovnici (6) bude tedy dán vzorcem

$$A(x) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \int_o^\beta \int_o^\beta \ldots \int_o^\beta L(x, y_1) L(y_1, y_2) \ldots \times$$

$$\times L(y_{n-1}, y_n) \, F(y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_n. \tag{8}$$

Symbolický součin v n-tém členu řady počítá se tak, že nejprve určíme vektor

$$L(y_{n-1}, y_n) \, F(y_n),$$

pak jeho integrál dle y_n, pak součin

$$L(y_{n-2}, y_{n-1}) \, . \, [L(y_{n-1}, y_n) \, . \, F(y_n)],$$

načež integrál tohoto součinu dle y_{n-1} atd.

Hlavní výsledek našich úvah dá se vyjádřiti takto:

Považujeme-li veličiny u, v a w za složky vektoru, jehož začáteční bod jest v intervalu (o, β), veličiny f, g a h pak za složky vektoru daného, dá se soustava integrálních rovnic (4) převésti buď na jedinou skalární integrální rovnici (5) o neznámé $\varphi(x)$ nebo na jedinou vektorovou integrální rovnici (6) o neznámém vektoru $A(x)$.

V rovnici (5) vyskytuje se integrační intervall $(o, 3\beta)$; v první jeho třetině (o, β) rovná se neznámá funkce $\varphi(x)$ složce u, ve druhé jeho třetině $(\beta, 2\beta)$ složce v a v poslední třetině $(2\beta, 3\beta)$ složce w.

Úloha (4) zjednodušuje se užitím vektorového počtu zrovna tak jako užitím Fredholmovy methody.

Vektorová rovnice (6) a jí rovnocenná skalární rovnice (5) mají stejný tvar; to je výsledek pozoruhodný.

Řešení postupnými approximacemi, známé z nauky o integrálních rovnicích skalárních, dá se přenésti, jak jsme viděli, na vektorovou rovnici (6). Poznamenejme však, že formule (7) a (8) platí jen potud, pokud $|\lambda|$ je číslo dosti malé; obecné řešení, platné pro každou hodnotu parametru λ, obdrželi bychom, applikujíce na rovnici (5) obecnou Fredholmovu methodu nekonečných determinantů.

7. Obě methody, jimiž lze převésti soustavu (4) na jedinou rovnici (5) resp. (6), dají se bez podstatné změny rozšířiti i na případy, že neznámé funkce u, v, w nebo φ závisejí na r nezávisle proměnných. Na místo intervallu (o, β) v němž jsou dané funkce proměnné x definovány, nastoupí r-rozměrný obor S, geometrické místo bodu P nebo Q; dané funkce označíme $p(P)$, $k(P, Q)$, hledané funkce pak $u(P)$, $v(P)$, $w(P)$. Rovněž lze obě methody zobecniti pro případ, že je počet neznámých funkcí jakýkoliv.

Pro úlohy, jež se vyskytují v mathematické fysice, je zvláště významný případ, že vektor o složkách u, v, w je funkcí bodu v oboru o dvou nebo o třech rozměrech.

Přihlédněme blíže k této úloze: začáteční bod P vektoru o složkách u, v, w leží na dané uzavřené ploše S_1. Budiž $d\sigma_p$ nekonečně malý element této plochy v okolí bodu P. Neznámé $u(P)$, $v(P)$ a $w(P)$ mají se určiti z těchto rovnic:

$$\left.\begin{aligned}
u(P)+\lambda\int_{S_1}\Big[c_{11}(P,Q)\,u(Q)+c_{12}(P,Q)\,v(Q)+c_{13}(P,Q)\,w(Q)\Big]d\sigma_Q&=f(P)\\
v(P)+\lambda\int_{S_1}\Big[c_{21}(P,Q)\,u(Q)+c_{22}(P,Q)\,v(Q)+c_{23}(P,Q)\,w(Q)\Big]d\sigma_Q&=g(P)\\
w(P)+\lambda\int_{S_1}\Big[c_{31}(P,Q)\,u(Q)+c_{32}(P,Q)\,v(Q)+c_{33}(P,Q)\,w(Q)\Big]d\sigma_Q&=h(P)
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Mysleme si plochu S_1 jakožto geometrické místo bodu P (nebo Q) třikráte; tyto tři shodné plochy označíme S_1, S_2, S_3 a obor jimi utvořený $\sigma = S_1 + S_2 + S_3$. Budiž P libovolný bod v oboru σ a P_0 bod homologický k němu v S_1 (každému bodu ležícímu v S_2 neb v S_3 odpovídá jediný bod v S_1). Podobně odpovídá každému bodu Q v σ jediný bod Q_0 v S_1. Definujme nyní funkce $\varphi(P)$, $p(P)$ a funkci $K(P, Q)$ bodů P, Q, ležících v oboru σ takto:

$\varphi(P) = u(P_0)$, $p(P) = f(P_0)$, je-li P v oboru S_1
$\varphi(P) = v(P_0)$, $p(P) = g(P_0)$, „ P „ „ S_2
$\varphi(P) = w(P_0)$, $p(P) = h(P_0)$, „ P „ „ S_3

$K(P, Q) = c_{ik}(P_0, Q_0)$, je-li P v oboru S_i a Q v oboru S_k.

Za těchto předpokladů můžeme nahraditi soustavu (9) jedinou rovnicí

$$\varphi(P) + \lambda \int_{\sigma} K(P, Q)\ \varphi(Q)\ d\sigma_Q = p(P) \qquad (10)$$

Integračním oborem je $\sigma = S_1 + S_2 + S_3$; bod P může býti kdekoli v tomto oboru.

Redukce soustavy (9) na jedinou rovnici vektorovou tvaru

$$A(P) + \lambda \int_{S_1} L(P, Q)\ A(Q)\ d\sigma_Q = F(P) \qquad (11)$$

provedla by se docela tak, jak byla redukována soustava (4) na vektorovou rovnici (6).

8. **Jakožto příklad úlohy, kterou lze vyjádřiti soustavou integrálních rovnic (9), uvádím problém elastické rovnováhy pružného tělesa, jsou-li na jeho povrchu dány buď deformující síly neb deformace samy.**

První úloha, která byla integrální rovnicí řešena, byl problém Dirichletův: nalézti funkci harmonickou v daném oboru, která nabývá na kraji oboru předepsaných hodnot. Fredholm ukázal, že taková funkce dá se vyjádřiti jakožto potenciál dvojvrstvy rozložené po kraji daného oboru. Je-li na př. daný obor trojrozměrný, vyhovuje hustota $\varphi(P)$ dvojvrstvy integrální rovnici

$$\varphi(P) + \lambda \int_S K(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\sigma_Q = f(P),$$

kde f a K jsou dané funkce bodů P a Q, $d\sigma$ pak element plochy S daný obor omezující. Jakmile určíme neznámou hustotu $\varphi(P)$, vypočte se hledaná harmonická funkce jednoduchou integrací.

Fredholm ukázal pak,*) že též obecný problém elastické rovnováhy dá se uvésti na soustavu integrálních rovnic tvaru (9). Neznámý vektor o složkách u, v, w má v této úloze obdobný význam, jako hustota dvojvrstvy v případě problému Dirichletova. Obecný problém elastické rovnováhy dá se tedy uvésti buď na jedinou skalární integrální rovnici tvaru (10) nebo na jedinou vektorovou rovnici tvaru (11); $L(P, Q)$ značí pak matrix o třech řádcích a o třech sloupcích, t. zv. Somiglianův tensor.**)

*

Analyse vectorielle et équations intégrales.

(Extrait de l'article précédent.)

Un système d'équations intégrales (4) à trois fonctions inconnues peut être remplacé par une équation unique, soit en employant la méthode d'élimination de M. Fredholm, soit en introduisant la notion du produit d'un tableau à trois lignes et à trois colonnes et d'un vecteur (voir l'article de M. H. Weyl dans les „Rendiconti del circolo matematico di Palermo“, t. 39).

La première méthode conduit à l'équation (5). La deuxième méthode nous amène à l'équation (6). Dans cette dernière équation $A(x)$ représente le vecteur inconnu dont les composantes sont

---

*) *J. Fredholm:* Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. (Arkiv för Matem. Astron. och Fysik. Bd. 2. No. 28; 190). Fredholmova methoda byla podrobně zpracována v pojednáních: *G. Lauricella:* Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica. (Il Nuovo Cimento, ser. 5. t. XIII. 1907). — *R. Marcolongo:* La théorie des équations intégrales et ses applications à la physique mathématique (vyšlo původně v Rendiconti dell' Accademia dei Lincei ser. 5. vol. XVI. 1° sem., pak ve francouzském překladu v Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 2e série, t. X. 1908).

**) *H. Weyl:* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 39; 1915). V této práci zavádí Weyl symbolické násobení matrice (tensoru) s vektorem ve smyslu vyloženém v odst. 5. hořejšího textu.

$u(x)$, $v(x)$, $w(x)$; $F(x)$ est le vecteur donné, dont les composantes sont $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$; $L(x, y)$ désigne le tableau formé par les neuf fonctions $c_{ik}(x, y)$. Le symbole

$$\int_0^\beta L(x, y)\ A(y)\ dy$$

représente le vecteur dont les composantes sont définies au moyen de la formule

$$\int_0^\beta [c_{k1}(x, y)\ u(y) + c_{k2}(x, y)\ v(y) + c_{k3}(x, y)\ w(y)]\ dy,\quad k = 1, 2, 3.$$

Les équations (5), (6) ont la même forme. On peut donc dire que la simplification du problème (4) qui résulte de l'emploi de la méthode de M. Fredholm est exactenent de la même nature que celle que l'on obtient en introduisant la notation vectorielle.

Poznámky o grafickém počtu.

Dr. techn. *Václav Hruška*, soukr. docent a asistent čes. vys. učení technického v Praze.

1. Je-li graficky stanoviti součin $a.b$, znázorníme a úsečkou $\overline{OA}$ při modulu α, b úsečkou $\overline{OB}$ při modulu β*) a obě tyto úsečky naneseme na ramena úhlu od společného vrcholu. Na jednom rameni zvolíme pól P tak, aby $\overline{OP} = \delta$. Spojíme P s koncovým bodem činitele na druhém rameni (B) a vedeme koncovým bodem činitele na prvém rameni (A) rovnoběžku s touto přímkou, až protne v C druhé rameno. Jest $\overline{OC} = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{\overline{OP}} = \dfrac{\alpha . \beta}{\delta} . a\ b$, takže úsečka $\overline{OC}$ představuje součin $a\ b.$ při modulu $\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\delta}$.

Podíl $\dfrac{b}{a}$ se ustanoví tak, že spojíme koncové body B, A, dělence a dělitele a pólem vedeme rovnoběžku s touto přímkou až protne druhé rameno v bodě D. Jest pak $\overline{OD} = \dfrac{b}{a}\left(\text{mod.}\ \delta\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

2. Funkci $y = f(x)$ můžeme za jistých podmínek znázorniti křivkou v Cartesiových souřadnicích. Proměnnou x znázorníme

---

*) Modul = jednička délky. Rovnice $\overline{OA} = a$ (mod α) značí tolik jako $\overline{OA} = a.\alpha$. Příslušný obrázek sestrojí si čtenář laskavě sám.