

Josef Klíma

O jisté jednodvojnáčné kvadratické reciproké příbuznosti v rovině

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 64--72

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123255>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1923

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

2. Předpokládáme, že rovnice (1) má dva kořeny reálné. Z uvedeného pojednání plyne, že v tomto případě musí být bod (t, s) uvnitř úseku II (obr. 2.), nebo na hranicích úseků I a II vyjma bod A.

Nutné a postačující podmínky, aby při tom reálné části všech kořenů byly stejné, jsou zase podmínky (3), tedy $s=0, t=0$.

Ale protože při $r=0$ má rovnice (1) pro $s=0, t=0$ čtyři reálné kořeny, je patrné, že při $r=0$ nemůže mít rovnice (1) dva kořeny reálné a dva komplexní, jejichž reálné části jsou stejné.

3. Předpokládáme, že rovnice (1) má všechny kořeny reálné.

Nutné a postačující podmínky, aby byly všechny stejné, jsou $r=0, s=0, t=0$, tedy bod (t, s) musí splynouti s bodem A (obr. 2.).

*

Remarque.

(Extrait de l'article précédent.)

La „Remarque“ complète le mémoire de l'auteur „Le caractère des vibrations dans deux circuits à induction mutuelle“ (Rozpravy Čes. Akademie, t. XXV, 1916, n° 52). Ce mémoire a donné une réponse sommaire à la question concernant la nature des racines de l'équation biquadratique caractéristique (racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales). Cette solution sommaire conduit (dans la „Remarque“ actuelle) à une résolution simple d'une autre question: quand est-ce que les racines de l'équation biquadratique possèdent des parties réelles ou des parties imaginaires (celles-ci au signe près) égales. (Ce qui veut dire, au point de vue physique: le même amortissement ou la même fréquence des vibrations.)

O jisté jednodvoznačné kvadrajické reciproké příbuznosti v rovině.

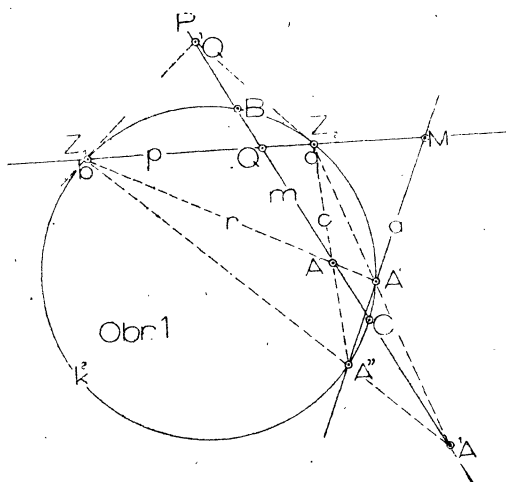
Dr. Klíma Josef.

V následujícím chci ukázati na jednoduchou cestu, jak dospějeme k zvláštní kvadratické jednodvoznačné reciproké příbuznosti a na některá její užití.¹⁾

¹⁾ Obecné vyšetření jednodvoznačné příbuznosti dvou bodových polí podal R. de Paolis v pojednání „Le trasformazioni piane doppie“ v Atti della Accademia Reale dei Lincei Roma r. 1877. Příklad jisté jednodvoznačné příbuznosti stupně 12ho podal p. prof. dr. Bydžovský v t. časopise roč. XLVII. str. 247.

Mysleme si základní kuželosečku k^2 (obr. 1.) a na ní dva základní body Z_1, Z_2 , jimiž je určena přímka $p \equiv \overline{Z_1 Z_2}$. Libov. bodu A nechť odpovídá spojnice a průmětů A', A'' bodu A ze zákl. bodů Z_1, Z_2 na kuželosečku k^2 . Táž přímka a odpovídá však ještě druhému bodu ${}^1A \equiv (\overline{Z_1 A'}, \overline{Z_2 A'})$. Body $A, {}^1A$ jsou patrně na přímce m jdoucí pólem P zákl. přímky p vzhledem ku k^2 a jsou harmonicky sdruženy ku kuželosečce k^2 , nebo jsou obecně inverzní ku k^2 vzhledem k pólu P dle Hirsta.¹⁾

Označme si pole bodové $A \dots \pi$ a pole přímkové $a \dots \pi$. Každému bodu A pole π odpovídá jediná přímka a pole π , ale naopak každé přímce pole π odpovídají dva body v poli π . Když



přímka a proběhne pole π , dvojice jí odpovídající v π pokryjí toto pole jednou; když však bod A proběhne pole π , přímka jemu odpovídající pokryje pole π dvojnásob a proto jmenuje se pole π dvojnásobným, kdežto pole bodové π jednoduchým. Výjimku tvoří tečny kuželosečky k^2 , jimž v π odpovídá jediný bod a to dotyčný, přímka $p \equiv \overline{Z_1 Z_2}$, již odpovídá v π kterýkoliv bod přímky p , neb bod P , a v poli π jsou to body Z_1 a Z_2 , jimž odpovídá vždy v π ∞^1 přímek jdoucích týmiž body Z_1 resp. Z_2 .

Body Z_1 a Z_2 jsou hlavními body v poli π a přímka p je hlavní přímkou v poli π . Hlavní křivky pole π , jež odpovídají hlavním bodům Z_1, Z_2 pole π , přecházejí tu v body Z_1 resp. Z_2 uvaž. co obálky ∞^1 přímek jimi jdoucích a hlavní křivka pole π odp. hlavní přímce p pole π přechází v přímku p .

¹⁾ Ku př. K. Doehlemann „Geom. Transform.“ díl II. str. 46.

Bude-li se přímka a v poli π otáčeti kol bodu M na p (obr. 1.), budou odpov. body A , 1A probíhati poláru m toho bodu, jež prochází bodem P a tvoří na ní involuci o samodruž. bodech $B \equiv {}^1B$ a $C \equiv {}^1C$, v nichž m protíná k^2 . Přejde-li přímka a otáčením kol M v přímku p , bude jí odpovídati bod Q , v němž seče m přímku p a bod ${}^1Q \equiv P$. Přímkám a jdoucím bodem M a neprotínajícím kuželosečku k^2 odpovídají na přímce m páry imag. sdruž. bodů, jež určili bychom eliptickou involucí, mající body B a C za jeden pár a druhý dostali bychom průmětem libov. páru sdruž. bodů na a z bodu Z_1 neb Z_2 . V případě, že M je uvnitř k^2 tvoří páry $A{}^1A$ eliptickou involuci. Tečny křivky k^2 , jimž odpov. pár bodový splývá, tvoří přechod od přímek, jimž odpov. dva reálné body k přímkám, jimž odpov. dva imag. body sdružené, i nazývá se proto křivka k^2 , křivkou přechodu.¹⁾

Konstrukci přímky a odpov. v naší transform. bodu A lze dáti též prostorový význam. Mysleme si totiž v prostoru bod S a spojme jej s body Z_1 a Z_2 přímkami b a q a proložme kuželosečkou k^2 a těmito přímkami libov. plochu $2^0 P^2$, jež bude přímkovou, jsou-li body Z_1 a Z_2 reálné. Spojnice bodu S s libov. bodem A pole π protíná plochu P^2 v bodě (A) , jímž procházejí na ploše dvě přímky povrchové (c) a (r) , jež protínají kuželosečku k^2 v bodech, jichž spojnice dává stopu a roviny tečné (α) , sestrojené k ploše v bodě (A) a jež odpovídá bodu A roviny v poli π . Površky (c) a (r) promítají se z bodu S na π do přímek c a r , jež procházejí bodem A a bodem Z_2 resp. Z_1 , do kterýchžto bodů posledních promítají se površky q a b (b, c, \dots jsou površky jedné osnovy a q, r, \dots druhé osnovy plochy P^2). Pole bodové π je tedy centrálním průmětem bodů plochy P^2 z jejího bodu S a pole přímkové $\bar{\pi}$ je souhrn stop rovin tečných v přísluš. bodech k ploše té. Ploch P^2 , jež vedou k dané transformaci, určené kuželosečkou k^2 a body Z_1 a Z_2 je ∞^4 , ježto bodů S možno zvoliti ∞^3 a základnou (k^2, b, q) lze proložití ∞^1 ploch 2^0 , jež tvoří svazek. Kuželoseček k^2 v π naproti tomu je ∞^5 a na každé lze pár Z_1, Z_2 zvoliti ∞^2 , takže našich transformací v rovině je ∞^7 , ale každou plochu P^2 lze užítí pro všechny transform., jež mají zákl. body Z_1, Z_2 na její stopě a to je pro ∞^2 , čímž dospíváme ke všem ∞^9 plochám 2^0 .

Zvolíme-li v $\bar{\pi}$ přímku a , lze ji k ploše P^2 proložití dvě roviny tečné, jichž body dotyku (A) (1A) jsou na sdruž. poláře, jež prochází pólem (P) roviny π , kterýžto pól z bodu S promítá se do pólu P zákl. přímky p ku k^2 . Hirstova obecná inverze ku k^2 pro pól P jeví se tu jako centr. průmět bodů plochy P^2 , jež jsou vždy na témž paprsku prostor. svazku o středu (P) . Pole přímek. $\bar{\pi}$ a svazek

¹⁾ V. Pascal „Repertorium d. höh. Math.“ II. 1. str. 366 neb R. Sturm „Die Lehre von den geom. Verwandtschaften“ dil IV. str. 236.

²⁾ Gino Loria: „Spezielle algebr. und transzendente ebene Kurven“ dil I. str. 429 a násl.

prostorový (P) jsou polární vzhledem k P^2 . Tak libov. křivce v π co souhrnu ∞^1 bodů odpov. na P^2 křivka, jež promítá se z (P) kuželem, jemuž v π , v polaritě uvedené, odpovídá křivka obalená ∞^1 přímkami, jež jsou polárně sdružené k ∞^1 površkám toho kužele a která odpovídá křivce pole π v naší transformaci.

Tato prostorová interpretace transformace usnadní konstrukci sdruž. prvků, jsou-li body Z_1, Z_2 neb i kuželosečka k^2 imaginární. Plocha P^2 je v tom případě nepřímkovou a třeba ji jen tak proložit, by v rovině (Sp) indukovala involuci sdruž. tečen, již se promítá involuce určující body Z_1, Z_2 z bodu S a v rovině π polární pole, jež určuje zákl. kuželosečku k^2 .

Odvoďme další vlastnosti transformace této a to přímo v rovině. výsledky tak obdržené dají se ovšem též snadno potvrditi prostor. nahlížením na transformaci.

Probíhá-li bod A v poli π (obr. 1) přímkou m jdoucí pólem P , obaluje odpov. přímka a v poli $\bar{\pi}$ bod M , pól to přímky m ke kuželosečce k^2 . Probíhá-li bod A lib. přímkou u probíhají body A', A'' na k^2 dvě promětné řady, jichž samodružné body T a 1T jsou v průsečících přímkou u s k^2 . Spojnice a odpov. si bodů těchto dvozemět. řad obalují kuželosečku u^2 dvojnásob se dotýkající kuželos. k^2 v bodech $T, {}^1T$, jež dotýká se též hlavní přímkou p a sice v bodě sdruž. ku k^2 k průsečíku (up).

„ ∞^2 přímkám roviny π odpovídá v $\bar{\pi}$ ∞^2 kuželoseček dvojnásob se dotýkající kuželosečky k^2 a hlavní přímky p .“

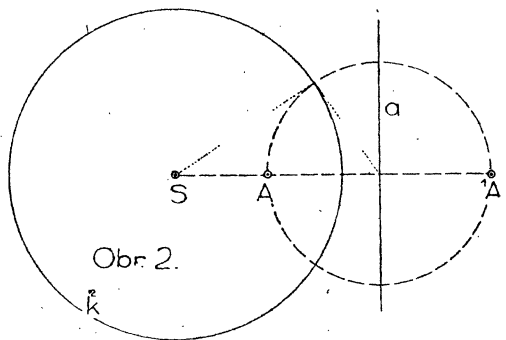
Úběžné přímce n pole π odpovídá v $\bar{\pi}$ kuželosečka n^2 , jež je soustředná a homothetická s kuželosečkou k^2 a jež se dotýká přímkou p v pólícím bodě úsečky $Z_1 Z_2$.

Mysleme si v poli $\bar{\pi}$ bod R , co obálku ∞^1 přímek a , tím bodem jdoucích. Libov. z těchto přímek a , protíná kužel. k^2 v bodech A a A'' a spojnice $Z_1 A', Z_2 A''$ resp. $Z_1 A'', Z_2 A'$ protínají se v bodech A resp. 1A křivky odp. bodu R . Křivka ta je patrně kuželosečka R^2 jdoucí body Z_1, Z_2 a body dotyku U a 1U tečen sestrojených z R ku k^2 . Že je to kuželosečka vyplývá též z následního: Libovolným bodem M hlavní přímkou p jde jediná přímka svazku R v poli $\bar{\pi}$, již odpovídají v π dva body na poláře m bodu M ku k^2 a jež jsou harmon. sdruž. ku k^2 , z čehož plyne dále, že spojnice \overline{PU} a $\overline{{}^1P}U$ jsou tečnami kuželosečky R^2 v U a 1U . Kuželosečka R^2 je hyperbolou, parabolou neb elipsou, je-li R vně, na neb uvnitř kuželosečky n^2 , která odpovídá v $\bar{\pi}$ úběžné přímce n pole π . Je-li bod R ve středu S kuželosečky k^2 odpovídá mu v π kuželosečka S^2 homothetická s k^2 o středu P , jdoucí body Z_1, Z_2 . Je-li bod R na přímce p , rozpadá se příslušná kuželosečka ve dvě přímky, a to, poláru bodu toho ku k^2 a přímkou p . Bodu P odpovídá kuželosečka P^2 dotýkající se tečen $\overline{PZ_1}, \overline{PZ_2}$, v bodech Z_1, Z_2 .

„ ∞^2 bodům roviny π odpovídá v π ∞^2 kuželoseček jdoucích body Z_1 a Z_2 obecně inverzních ku k^2 pro pól P .“

I je zřejmo, že tato reciproká transformace je v obou směrech kvadratická.

Zvláštní případ naší transformace dostaneme, je-li základní kuželosečka k^2 kružnicí a body Z_1 a Z_2 kruhovými body v nekonečnu. Bodu A (obr. 2) patrně odpovídá přímka, jež je osou potenční bodu A a kružnice k^2 . Přímce a naopak odpovídají dva body $A, {}^1A$, jež jsou souměrné k přímce a . Pól P obecného případu splývá tu se středem S kružnice k^2 a $A, {}^1A$ jsou inverzní ku kružnici k^2 . Libov. přímce u roviny π odpovídá v π parabola u^2



dvojnásob se dotýkající kružnice k^2 v průsečících s u o ose $\perp u$. Bodům R pole π odpovídají v π kružnice R^2 pravouhle protínající kružnici k^2 a o středem v R .

Křivce n^0 K^n roviny π odpovídá v poli π křivka $2n$ té třídy K_{2n} , ježto bodem R pole π prochází k ní tolik tečen, v kolika bodech křivka K^n protíná kuželosečku R^2 odpov. bodu R . Křivka K_{2n} má přímku p za n násobnou tečnu, ježto p odpov. n průsečíkům křivky K^n s p . Křivka K_{2n} dotýká se zákl. kuželosečky k^2 ve $2n$ bodech, v nichž K^n protíná k^2 . Dvojně tečny křivky K_{2n} odpovídají předně dvojným bodům křivky K^n , ale ještě další dvojně tečny dostaneme následovně: Sestrojíme v poli π ku křivce K^n křivku obecně inverzní ku k^2 pro pól P , což je jak známo křivka K^{2n} stupně $2n$. Tato křivka protíná danou K^n ve $2n^2$ bodech, z nichž je $2n$ na zákl. křivce k^2 . Zbývající $2n(n-1)$ průsečné body jsou vždy po dvou na paprscích svazku P a těmto vždy dvěma bodům odpovídá jediná přímka, jež je dvojnou tečnou křivky K_{2n} . Těchto dvojných tečen je $n(n-1)$. Je-li tedy křivka K^n racionální, t. j. má-li $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojných bodů, bude mít odpov. křivka K_{2n}

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + n(n-1)$ dvojných tečen a jednu n -násobnou, jež zastupuje $\frac{1}{2}n(n-1)$ dvoj. tečen, což je dohromady $(n-1)(2n-1)$, tedy křivka racionální třídy $2n$, jak odpovídá jednoznačné přiřazenosti bodů křivky K^n a tečen křivky \overline{K}_{2n} .

Prochází-li křivka K^n bodem Z_1 , sníží se stupeň odpov. křivky o 1 a p je $(n-1)$ násob. tečnou; podobně prochází-li bodem Z_2 . Je-li bod P k -násobným bodem křivky K^n je přímka p $(n+k)$ násob. tečnou pro křivku \overline{K}_{2n} .

Zvláštní případy: Přímce jdoucí bodem Z_1 nebo Z_2 odpovídá v π bod, v němž přímka ta protíná podruhé kuželosečku k^2 . Kuželosečce jdoucí bodem Z_1 nebo Z_2 odpovídá v π křivka třetí třídy racionální, jejíž dvojná tečna odpovídá jedinému páru bodů obecně inverzních na dané kuželosečce ku k^2 pro pól P . Všechny tyto křivky třetí třídy dotýkají se trojnásob kužel. k^2 v průsečících s danou kuželosečkou a přímkou p . I bylo by lze této transformace užití k sestrojení rac. křivek třetí třídy, jež dotýkají se trojnásob dané kuželosečky k^2 a pěti tečen atd.

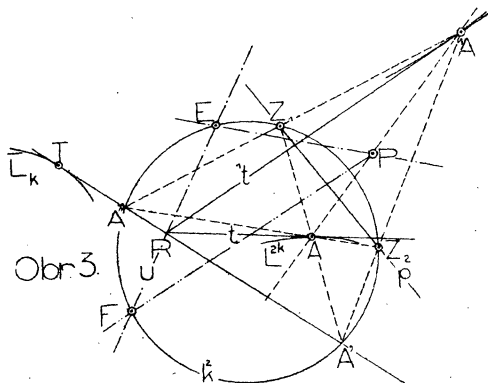
Kuželosečce jdoucí body základními Z_1, Z_2 odpovídá v π opět kuželosečka dvojnásob se dotýkající zákl. kuželosečky k^2 v průsečících s danou kuželosečkou. ∞^3 kuželosečkám jdoucím body Z_1, Z_2 odpovídá ∞^3 kuželoseček dvojnásob se dotýkající kuželosečky k^2 . Kuželosečce homothetické s k^2 a procházející body Z_1, Z_2 odpovídá v π kuželosečka homothetická a soustředná s k^2 .

Dotýká-li se daná kuželosečka jdoucí body Z_1, Z_2 kuželosečky k^2 , má odpovídající kuželosečka v π s k^2 dotyk čtyrbodový v přísluš. bodě dotyku. I dalo by se transformace této užití ku konstrukci kuželoseček dotýkajících se dvojnásob dané kuželosečky k^2 a tři tečen, což je úloha čtyřznačná a přechází v určení kuželosečky pěti body, neb, zvolíme-li body základní Z_1 a Z_2 v průsečících jedné tečny s k^2 , v určení přímky dvěma body, jež odpovídají druhým dvěma tečnám. Stejně určení kuželosečky, jež dotýká se dvou tečen a má s k^2 dotyk čtyrbodový, přechází v určení kuželosečky, jdoucí čtyřmi body a dotýkající se kuželosečky k^2 , jež prochází dvěma z těchto bodů, nebo, při zvolení zákl. bodů Z_1, Z_2 v průsečících jedné z daných tečen s kuželosečkou k^2 , v určení tečen, ku k^2 z bodů, jež odpovídají v transformaci druhé tečně. Úloha opět čtyřznačná.

Máme-li speciálně transformaci vytknutou v obr. 2. dostáváme, že každé kružnici odpovídá kuželosečka dvojnásob se dotýkající základní kružnice k^2 v průsečících s touto kružnicí. Dotýká-li se tedy daná kružnice v poli π zákl. kružnice k^2 , odpovídá jí kuželosečka, jež se dané kružnice k^2 dotýká čtyrbodově, t. j. pro níž k^2 je oskulační kružnicí ve vrcholu. Úloha tedy, sestrojiti kuželosečku dotýkající se dvojnásob dané kružnice a tři tečen, přechází v určení kružnice třemi body a úloha určití kuželosečku, jež se

dané kružnice dotýká čtyřbodově a dvou tečen, v určení kružnice jdoucí dvěma body a dotýkající se základní kružnice k^2 .

Uvažujme nyní, co odpovídá křivce k -té třídy L_k pole π . Je to patrně křivka $2k$ -tého stupně L^{2k} , ježto s přímkou u roviny π má tolik bodů společných, kolik společných tečen má křivka L_k s kuželosečkou u^2 , jež odpovídá přímce u v poli π . Sice každé této společné tečně odpovídají v π dva body, ale jen jeden je na přímce u , kdežto druhý je na kuželosečce, jež je obecně inverzní dle k^2 k přímce u vzhledem k P co pólu inverse. Průsečíky L^{2k} s k^2 jsou v dotyč. bodech společ. tečen křivek L_k a k^2 , a tečny v nich procházejí pólem P . Body Z_1 a Z_2 jsou k -násobnými body křivky



L^{2k} , ježto k -tečnám ze Z_1 ku př. odpovídá k -krátě bod Z_1 a k bodů, jež jsou ná. tečně v Z_1 ku k^2 . Křivka L^{2k} je sama k sobě obecně inverzní (obecně analogmatickou) ku k^2 pro pól P .

Je-li křivka L_k racionální, t. j. má-li $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ dvoj. tečen, tu křivka odpov. L^{2k} má $(k-1)(k-2)$ dvoj. bodů a dva k -nás. body Z_1 a Z_2 a tedy je rodu

$$\frac{1}{2}(2k-1)(2k-2) - (k-1)(k-2) - k(k-1) = k-1.$$

Bude-li se křivka L_k dotýkati n -násobně přímkou p , tu příslušná křivka L^{2k} rozpadne se v n -násobně počítanou přímkou p a křivku stupně $(2k-n)$, jež má v bodě P n -násob. bod a v bodech Z_1 a Z_2 body $(k-n)$ násobné, a je-li L_k opět racionální, je L^{2k-n} rodu $k-1$. Tak ku př. kuželosečce, jež se dotýká p , odpovídá v π křivka 3^o rodu 1, jež jde body Z_1, Z_2, P . Dotýká-li se tato kuželosečka ještě dvojnásob kuželosečky k^2 , rozpadne se odpov. křivka 3^o v přímku spojující oba body dotyku a kuželosečku jdoucí body Z_1, Z_2, P , jež je inverzní k přímce této vzhledem ku k^2 a pólu P .

R tečny t křivky K^n v bodě A s tečnou a , vzhledem k průsečíkům A', A'' tečny a s k^2 .

Jak by byla definována duální transformace a které by dávala výsledky, je samozřejmé.

Případ, kdy kuželosečka zákl. k^2 se rozpadá ve dvě přímky, nebo v případě duálním, ve dva body, vede ke konstrukt. jednoduché reciproké kvadratické Cremonově transformaci.

*

Sur une correspondance quadratique réciproque et biunivoque dans le plan.

(Extrait de l'article précédent.)

Une conique k^2 est coupée par une droite p aux points Z_1, Z_2 . Si l'on fait correspondre à un point arbitraire A la droite a joignant les deux points A', A'' , où la conique est coupée respectivement par les droites $Z_1 A, Z_2 A$, on a une correspondance $[2, 1]$ entre les points et les droites du plan. Désignons par π le système des points, par $\bar{\pi}$ le système des droites de ce plan. On peut obtenir la même correspondance au moyen d'une quadrique P^2 passant par la conique k^2 ; le système π est alors la projection de cette surface, le centre de projection étant le point d'intersection S des droites de la surface passant par les points Z_1, Z_2 , le système $\bar{\pi}$ est formée par les droites d'intersection du plan avec les plans tangents aux points respectifs.

A une droite u de $\bar{\pi}$ correspond dans π une conique qui touche k^2 aux points d'intersection de cette conique avec u , et tangente à p . A un point R de π correspond dans $\bar{\pi}$ une conique passant par Z_1, Z_2 et qui correspond, en général, à k^2 dans une inversion dont le centre est le pôle P de p par rapport à k^2 . Les points principaux de π sont Z_1, Z_2 ; les courbes principales, qui leur correspondent dans $\bar{\pi}$, sont ces mêmes points; la droite principale de $\bar{\pi}$ est p ; la courbe principale qui lui correspond dans π est cette même droite. (Cas particulier: k^2 est un cercle, Z_1, Z_2 les points circulaires.)

A une courbe K^n de π correspond, dans $\bar{\pi}$, une courbe ayant la classe $2n$, pour laquelle p est une tangente n -uple; cette courbe est rationnelle, si K^n l'est. La classe s'abaisse d'une unité, si K^n passe par un des points Z_1, Z_2 . Le cas particulier d'une conique passant par Z_1, Z_2 conduit à la construction d'une conique qui a un contact double (un contact du 3^e ordre) avec k^2 et qui touche, en outre, trois (deux) tangentes données. A une courbe L_k de $\bar{\pi}$ correspond, dans π , une courbe L^{2k} de l'ordre $2k$, dont Z_1, Z_2 sont des points k -uples, et qui est une anallagmatique par rapport à k^2 et le pôle P . Si L_k est rationnelle, L^{2k} a le genre $k-1$.