Václav A. Hruška

Poznámky o grafickém počtu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 46--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123250

$u(x)$, $v(x)$, $w(x)$; $F(x)$ est le vecteur donné, dont les composantes sont $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$; $L(x, y)$ désigne le tableau formé par les neuf fonctions $c_{ik}(x, y)$. Le symbole

$$\int_0^\beta L(x, y)\, A(y)\, dy$$

représente le vecteur dont les composantes sont définies au moyen de la formule

$$\int_0^\beta [c_{k1}(x, y)\, u(y) + c_{k2}(x, y)\, v(y) + c_{k3}(x, y)\, w(y)]\, dy, \quad k = 1, 2, 3.$$

Les équations (5), (6) ont la même forme. On peut donc dire que la simplification du problème (4) qui résulte de l'emploi de la méthode de M. Fredholm est exactenent de la même nature que celle que l'on obtient en introduisant la notation vectorielle.

Poznámky o grafickém počtu.

Dr. techn. *Václav Hruška*, soukr. docent a asistent čes. vys. učení technického v Praze.

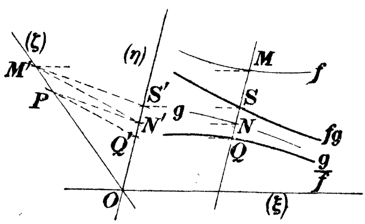
1. Je-li graficky stanoviti součin $a . b$, znázorníme a úsečkou $\overline{OA}$ při modulu α, b úsečkou $\overline{OB}$ při modulu β*) a obě tyto úsečky naneseme na ramena úhlu od společného vrcholu. Na jednom rameni zvolíme pól P tak, aby $\overline{OP} = \delta$. Spojíme P s koncovým bodem činitele na druhém rameni (B) a vedeme koncovým bodem činitele na prvém rameni (A) rovnoběžku s touto přímkou, až protne v C druhé rameno. Jest $\overline{OC} = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{\overline{OP}} = \dfrac{\alpha . \beta}{\delta} . a\ b$, takže úsečka $\overline{OC}$ představuje součin $a\, b.$ při modulu $\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\delta}$.

Podíl $\dfrac{b}{a}$ se ustanoví tak, že spojíme koncové body B, A, dělence a dělitele a pólem vedeme rovnoběžku s touto přímkou až protne druhé rameno v bodě D. Jest pak $\overline{OD} = \dfrac{b}{a} \left(\text{mod.}\, \delta \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

2. Funkci $y = f(x)$ můžeme za jistých podmínek znázorniti křivkou v Cartesiových souřadnicích. Proměnnou x znázorníme

*) Modul = jednička délky. Rovnice $\overline{OA} = a$ (mod α) značí tolik jako $\overline{OA} = a . \alpha$. Příslušný obrázek sestrojí si čtenář laskavě sám.

úsečkou ξ při mod. α a y pořadnicí η při mod. β. Rovnice oné křivky f (obr. 1.) jest $\eta = \beta f\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$. Mějme funkci $y = g\,(x)$ znázorněnu křivkou g. Při tom modul pro úsečky buď α jako dříve, kdežto pro pořadnice můžeme voliti libovolný modul γ. Chceme nakresliti křivky zobrazující funkce $y = f\,(x)\,g\,(x)$ a $y = \frac{g(x)}{f\,(x)}$. Veďme libovolně počátkem osu (ζ) a zvolme na ní pól P tak, aby rovnoběžka s osou (ξ) jdoucí pólem měla rovnici $\eta = \delta$.*) Zvolíme-li nějaké x, dostaneme součin hodnot $f\,(x)\,.\,g\,(x)$ takto: Body M a N křivek resp. f a g promítneme rovnoběžně s (ξ) na osy (ζ) a (η) resp. do M' a N'. Rovnoběžka $\overline{M'S'}$ s $\overline{PN'}$ protne (η) tak, že $\overline{OS'} = f\,(x)\,g\,(x)$. Promítneme-li S' zpět na pořadnici M a N do bodu S, jest S bodem křivky, zobrazující funkci $y = f\,(x)\;g\,(x)$.



Obr. 1.

Modul jejich pořadnic jest patrně $\frac{\beta\,\gamma}{\delta}$. Podobně rovnoběžka $\overline{PQ'}$ s $\overline{M'N'}$ protne (η) tak, že $\overline{OQ'} = \frac{g\,(x)}{f\,(x)}\left(\text{mod. } \delta\,\frac{\gamma}{\beta}\right)$. Promítnutím Q' zpět na pořadnici M a N do Q dostaneme obraz funkce $\frac{g\,(x)}{f\,(x)}$. Aby výsledek byl co nejpřesnější, doporoučí se rozpůliti přibližně osou (ζ) tupý úhel os (ξ) a (η). Pořadnice pólu P v soustavě souřadné (ξ, η) musí býti kladná; jinak bychom dostali $-f\,.\,g$ resp. $-\frac{g}{f}$.

Jako ukázky užití oné konstrukce buďtež uvedeny:

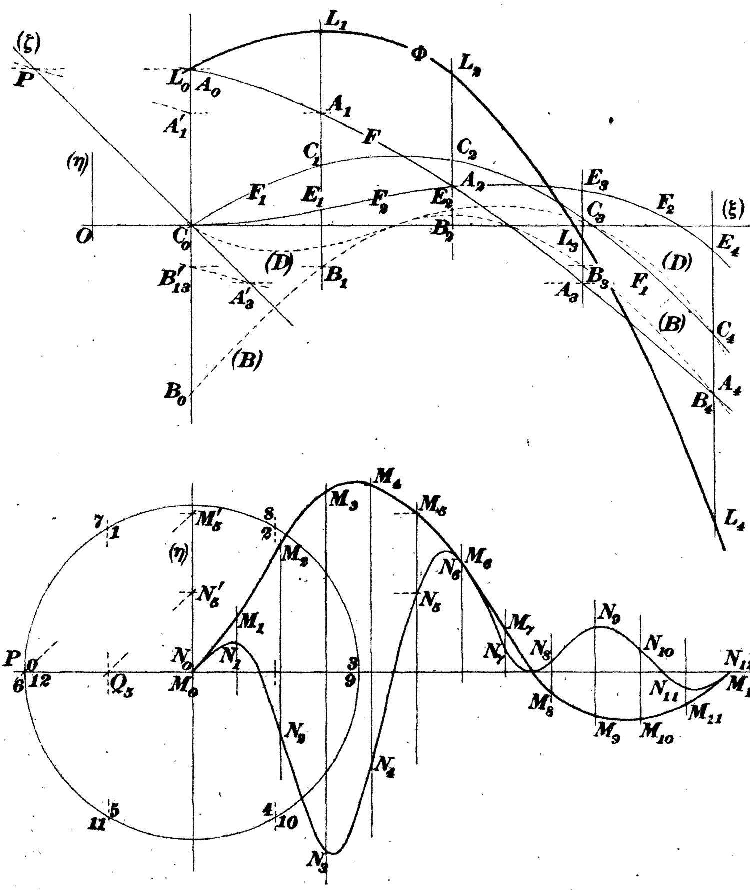
3. Momenty statický a setrvačnosti vzhledem k ose X plochy, omezené osou X, dvěmi pořadnicemi a křivkou jsou

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx \qquad T = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx. \;**)$$

Volíme-li tedy pro x a y stejný modul α a nakreslíme dle pře-

*) Toto δ nazveme stručně pólovou distancí.
**) Obrázek si udělá laskavý čtenář sám.

dešlého odstavce křivku y^2 jako součin $y \, . \, y \left(\text{mod. } \beta = \frac{\alpha^2}{\delta}\right)$ a pak křivku y^3 jako součin $y \, . \, y^2$ (mod. $\gamma = \frac{\alpha^3}{\delta \, . \, \delta'}$, jestliže při druhém násobení jsme zvolili jinou pólovou distanci δ'), budou tyto křivky



Obr. 2. a 3.

zobrazovati též funkce $\frac{1}{2} y^2$ (mod. 2β) a $\frac{1}{3} y^3$ (mod. 3γ) a jejich plochy tedy se budou rovnati S (mod. $2 \alpha \beta$) a T (mod. $3 \alpha \gamma$). Plochy tyto ustanovíme buď planimetrem, integrafem nebo grafickou integrací.

4. Grafické řešení specielní integrální rovnice

$$f(t)+\int_0^t f(x)\, F(t-x)\, dx=\varphi(t)^{*)} \qquad (1)$$

provede se postupnými approximacemi. Definujme funkce

$$F_1(t)=\int_a^t F(x)\ F(t-x)\, dx$$

$$F_2(t)=\int_a^t F_1(x)\ F(t-x)\, dx$$

. . . .

$$\Phi(t)=F(t)+F_1(t)+F_2(t)+\ldots \qquad (2)$$

pak řešením rovnice (1) jest funkce

$$f(t)=\varphi(t)+\int_a^t \Phi(t-x)\,\varphi(x)\, dx. \qquad (3)$$

Funkci $y=F(x)$ mějme dánu křivkou $F(A_0 A_1 A_2 \ldots)$ při modulech α, β (obr. 2). Na osu (ξ) nanesme sudý počet $2n$ stejných dílků délky h. Abychom našli křivku zobrazující funkci $F_1(t)$ zvolme $t=2ih$ ($i \gtreqless n$) (na obrázku zvoleno $2i=4$) a nakresleme křivku (B) zobrazující funkci $F(x)\ F(t-x)$. Konstrukce vyplývá přímo z odst. 2. a jest provedena v obrázku pro body B_1 a B_3:

$$\overline{A_1 A'_1} \parallel (\xi) \parallel \overline{A_3 A'_3},\ \overline{A'_3 B'_{13}} \parallel \overline{PA'_1},^{**)}$$

B'_{13}, B_1, B_3 leží na rovnoběžce s (ξ). Najděme nyní graficky hodnotu $F_1(t)=\int_0^t F(x)\ F(t-x)\, dx$ používajíce k tomu pólu P' o pólové distanci $\delta'=\frac{\alpha\beta}{\delta}.^{***)}$ Pak $F_1(t)$ bude dáno pořadnicí bodu C_4 při modulu $\frac{\beta^2\alpha}{\delta\delta'}=\beta$. Konstrukci opakujme při $2i=2, 4, \ldots 2n$. Dostaneme tak řadu bodů $C_0\ C_2\ C_4 \ldots C_{2n}$ křivky zobrazující $F_1(t)$. Jelikož $F_1(a)=0$, je C_0 na ose (ξ). Stejně hledáme $F_2(t)$. Zvolíme $t=2ih$ (v obrázku $2i=4$), nakreslíme křivku (D) zobrazující funkci $F_1(x)\,.\,F(t-x)$ a najdeme pomocí téhož pólu jako dříve

$$F_2(t)=\int_a^t F_1(x)\ F(t-x)\, dx.$$

Toto $F_2(t)$ jest dáno pořadnicí bodu E_4 při modulu β. Konstrukci opakujeme při $2i=2, 4, \ldots 2n$ a dostaneme tak řadu bodů E_0, E_2, $E_4, \ldots E_{2n}$ znázorňující funkci $F_2(t)$. Atd. Funkci $\Phi(t)$ najdeme prostým

*) d'Ocagne, Cours de géométrie pure et appliquée, t. II. p. 363 popisuje Pascalův integraf pro řešení této rovnice.

**) V obrázku zvoleno $\delta=OA_0$.

***) V obrázku vynechán.

sečtením pořadnic křivek F, F_1, F_2,.. jelikož tyto pořadnice mají stejný modul β. Je-li ještě dána funkce $\varphi(t)$*) křivkou o mod. β pro pořadnice, nakreslíme známým způsobem $\int_a^t \Phi(t-x)\varphi(x)\,d\,x$, který bude dán křivkou o mod. β pro pořadnice. Najíti $f(t)$ jest pak prosté.

Poznámka: Patrně není potřebí skutečně kresliti křivky $F(x) \cdot F(t-x)$, $F_1(x)\ F(t-x)$ atd. Stačí znáti pouze jejich body na přímkách $x = k\,.\,h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots 2\,n)$. Křivky $F, F_1, F_2, \ldots$ nutno ovšem nakresliti celé. Z obrázku jest patrno, jak rapidně konverguje řada $F+F_1+F_2+\ldots$, takže obyčejně stačí vzíti jen 3 až 4 členy.

5. Koefficienty Fourierovy řady funkce $F(x)$

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos i\,x\,d\,x \qquad b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin i\,x\,d\,x$$

po lehké modifikaci konstrukce uvedené v odst. 2. najdeme graficky takto (obr. 3.): Funkce $F(x)$ buď dána křivkou $M_0\ M_1\ M_2 \ldots$ Moduly pro x a y buďte α a β. Obor x od O do 2π rozdělme na $n = 12$ nebo 24 dílů. (V obrázku na 12.) Opišme kol počátku kružnici o poloměru δ a rozdělme její obvod na stejně velký počet dílů. Na této kružnici volme na záporné části (ξ) pól P a očíslujme dělicí body na kružnici ob $(i-1)$ (v obrázku ob jeden) a promítněme tyto body na osu (ξ) a průmět bodu označeného číslem k nazveme Q_k (v obrázku takto nakreslen Q_5). Promítneme-li M_k do M'_k na ose (η) a bodem Q_k vedeme rovnoběžku $\overline{Q_k\,N'_k}$ s $\overline{PM'_k}$, bude patrně pořadnice N'_k rovna $F\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\cos i.\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)$ (mod. β).

Opakujeme-li tuto konstrukci pro $k = 0, 1, 2 \ldots n$ dostaneme řadu bodů $N_0, N_1, N_2, \ldots$ křivky $F(x)\cos i\,x$ a integrál této funkce dělen π dá a_i. S výhodou k této grafické integraci použijeme pólu P. Křivku $F(x)\sin i\,x$ a její integrál bychom našli podobně.

Poznámka: Opět není nutno kresliti křivku $F(x)\cos i\,x$. Stačí znáti pouze jednotlivé její body.

*

Remarques sur le calcul graphique.

(Extrait de l'article précédent.)

Soient données graphiquement: la fonction $y=f(x)$ par la courbe f (fig. 1), les modules pour les coordonnées étant α, β, et la fonction $y=g(x)$ par la courbe g, les modules étant α, γ. La

*) Další konstrukce byla z obrázku vynechána pro přehlednost.

construction des courbes représentant les fonctions $y = f(x)\, g(x)$ et $y = g(x) : f(x)$ est la suivante: Menons par l'originela droite (ζ), choisissons sur (ζ) le pôle à l'ordonnée δ et projetons les points M, N des courbes f et g, sur la droite (ζ) et sur l'axe des (η) suivant les points M', N'. La parallèle $M'\,S'$ à la droite $\overline{PN'}$ détermine sur l'axe des (η) le point S' qui, projeté sur l'ordonnée des points M et N, donne un point S de la courbe fg, représentant la fonction $y = f(x)\, g(x)$. Le module pour les ordonnées de la courbe fg est $\frac{\beta\gamma}{\delta}$. La parallèle $\overline{PQ'}$ à la droite $\overline{M'N'}$ détermine le point Q', lequel, projeté sur l'ordonnée des points M et N, donne un point Q de la courbe $g:f$, représentant la fonction $y = g(x) : f(x)$; le module des ordonnées est $\delta\frac{\gamma}{\beta}$.

On peut se servir de cette construction dans beaucoup de cas, p. ex. pour calculer graphiquement les moments statiques S et les moments d'inertie T (n^0 3). Il suffit de trouver les aires des courbes qui représentent les fonctions $y^2 = y\,.\,y$ et $y^3 = y^2\,.\,y$. Un autre exemple est donné dans la fig. 2. (n^0 4), où la résolution purement graphique de l'équation intégrale (1) est indiquée; c'est l'équation considérée par M. d'Ocagne dans son „Cours de géométrie pure et appliquée“. En modifiant légèrement le procédé, on peut construire de la même facon les courbes représentant les fonctions $f(x)\, cos\, i\, x$ et $f(x)\, sin\, i\, x$, la courbe f étant donnée (fig. 3). On en peut faire usage dans l'analyse harmonique.

Poznámka k methodě postupných approximací.

Napsal *V. Jarník.*

Lalesco*) řešil methodou postupných approximací integrální rovnici nelineární 2. druhu

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]\, ds = F(x);$$

v následujícím ukáži, jak lze této methody užíti i na rovnici nelineární 1. druhu

$$\int_0^x \Psi[x, s, \varphi(s)]\, ds = 0.$$

I.

Hledejme funkci $\varphi(x)$, spojitou v okolí bodu $x = 0$, jež hoví rovnici

*) Journal de mathém. 1908.