Vilém Havlík
Superposiční pravítka nomografická

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 34--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123244

position importante, à savoir qu' il y a des chemins d'intégration s'étendant à l'infini sur lesquels l'expression

$$\left| \frac{1}{z^l} \frac{f'(z)}{f(z)} \right|$$

tend vers zéro dans tous les points; et même, quand cette condition est remplie, on peut montrer seulement que le genre de la transcendante est l au plus. La considération se simplifie, si la transcendante est paire ou impaire. Comme applications, sont données surtout les démonstrations des propositions qui sont plus générales que celles de Laguerre (Oeuvres compl., p. 174/7).

Superposiční pravítka nomografická.

Dr. Vilém Havlík.

V článku „Nomogramy transparentální“*) ukázal jsem nejdůležitější výsledky aplikace principu superposice rovin v nomografii. Viděli jsme též, že rovnici Keplerovu bylo možno řešiti pomocí početního pravítka superposičního. — Všimněme si blíže početních pravítek toho druhu.

Superposičním pravítkem o jednom transparentě budeme nazývati takové početní pravítko, nad jehož posouvátkem na dražce jest napiat průhledný papír — transparent — a na jehož posouvátku i transparentě jsou systémy nomografických elementů (bodů a čar), jichž vzájemným přiřazováním jednak uvedeme posouvátko v určitou polohu k transparentu a jednak řešíme rovnici, pro jejíž typ jest pravítko sestrojeno. — Jest na snadě, že po degeneraci některých systémů v transparentu neb na posouvátku můžeme superposičnímu pravítku dáti tvar pravítka iuxtaposičního, obvykle jen početním pravítkem zvaného (logaritmické pravítko a pod.).

Označme si rovinu posouvátka R_1 (se souřadnou soustavou x, y) a rovinu tramsparentu R_2 (se soustavou x', y') a vezměme směr osy $Y \equiv Y'$ za směr posouvání; můžeme pak psáti:

$$x = x'$$
$$y = y' + d$$

Snadno pak odvodíme vzorné rovnice základních typů superposičních pravítek. Na příklad:

A) Na ose Y budiž stupnice hodnot

$$y = F_1(\alpha)$$

a na ose Y' stupnice hodnot

$$y' = F_2(\beta);$$

---

*) V Časopise pro pěst. mat. a fys., roč. LI. str. 266.

v rovině R_1 budiž soustava přímek

$$x \,.\, f(\gamma) + y \,.\, g(\gamma) + h(\gamma) = 0$$

a v R_2 dvě (sdružené) soustavy křivek, jichž průsečíky $[\delta \,.\, \varepsilon]$ jsou parametricky dány rovnicemi

$$x = \varphi(\delta, \varepsilon), \; y = \psi(\delta, \varepsilon).$$

Posouvátko posuneme tak, aby splynul bod o kotě α_0 s bodem o kotě β_0; průsečík $[\delta_0 \,.\, \varepsilon_0]$ vytýká nám pak přímo příslušnou křivku (γ_0). Podle této posice, již ani graficky znázorňovati nebudeme, dojdeme také hned ke vztahu:

$$f(\gamma) \,.\, \varphi(\delta, \varepsilon) + g(\gamma) \,.\, [\psi(\delta, \varepsilon) + F_1(\alpha) - F_2(\beta)] + h(\gamma) = 0. \quad (1)$$

B) V rovině R_1 budiž systém přímek

$$x \,.\, f_1(\alpha) + y \,.\, g_1(\alpha) + h_1(\alpha) = 0$$

a dva (sdružené) systémy křivek:

$$x = \varphi_1(\beta, \gamma), \; y = \psi_1(\beta, \gamma)$$

právě tak v rovině R_2 systémy:

$$x' \,.\, f_2(\delta) + y' \,.\, g_2(\delta) + h_2(\delta) = 0$$
$$x' = \varphi_2(\varepsilon, \xi), \; y' = \psi_2(\varepsilon, \xi).$$

Posuneme posouvátko tak, aby průsečík $[\varepsilon_0 \,.\, \xi_0]$ padl na přímku (α_0); průsečík $[\beta_0 \,.\, \gamma_0]$ vytýká nám pak příslušnou přímku (δ_0). — Vyloučíme-li d z rovnic

$$f_1 \varphi_2 + g_1(\psi_2 + d) + h_1 = 0$$
$$f_2 \varphi_1 + g_2(\psi_1 - d) + h_2 = 0,$$

dostaneme vzorec:

$$\left.\begin{aligned} &g_1(\alpha) \,.\, [\varphi_1(\beta, \gamma) \,.\, f_2(\delta) + \psi_1(\beta, \gamma) \,.\, g_2(\delta) + h_2(\delta)] + \\ &+ g_2(\delta)\,[\varphi_2(\varepsilon, \xi) \,.\, f_1(\alpha) + \psi_2(\varepsilon, \xi) \,.\, \varphi_1(\alpha) + h_1(\alpha)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Analogické a obecnější vzorce bychom dostali, kdybychom přímo užili výsledků theorie nomogramů transparentálních vůbec. Příkladem buďte jen tyto dvě specialisace:

a) V rovině R_1 budiž kotovaná přímka o parametrických rovnicích

$$x_1 = \varphi_1(\alpha), \; y_1 = \varphi_1(\alpha) \,.\, a + b_1$$

a dva systémy sdružených křivek

$$x_2 = \varphi_2(\beta, x), \; y_2 = \psi_2(\beta, \gamma).$$

V rovině R_2 jest kotovaná přímka

$$x_1' = \varphi_3(\delta), \; y'_1 = \varphi_3(\delta) \,.\, a + b_2$$

a systém přímek

$$x' \,.\, f(\varepsilon) + y' \,.\, g(\varepsilon) + h(\varepsilon) = 0.$$

Směr posouvání jest rovnoběžný se směrem přímek $[\alpha]$ a $[\delta]$. Jest při tom $X \parallel X'$ a $Y \parallel Y'$. Poloha: přímky $[\alpha]$ a $[\delta]$ stotožněny a rovněž na nich body o kotách α_0 a δ_0. Průsečík $[\beta_0 \cdot \gamma_0]$ určuje přímku (ε_0). Vzorec jest:

$$\left.\begin{aligned}[\varphi_1(\alpha) - \varphi_3(\delta)] \, . \, [f(\varepsilon) + a \, . \, g(\varepsilon)] - f(\varepsilon) \, . \, \varphi_2(\beta, \gamma) + \\ + g(\varepsilon) \, . \, [b_1 - b_2 - \psi_2(\beta\, \gamma)] - h(\varepsilon) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

b) V R_1 budiž pevná přímka P:

$$a x + b y + c = 0,$$

dva systémy křivek

$$x = \varphi_1(\alpha, \beta), \; y = \psi_1(\alpha, \beta)$$

a systém přímek

$$x \, . f_1(\gamma) + y \, . g_1(\gamma) + h_1(\gamma) = 0.$$

V R_2 budiž pak pevný bod A (m, n) a jednak opět systém přímek

$$x' . f_2(\delta) + y' . g_2(\delta) + h_2(\delta) = 0$$

a dva systémy sdružených křivek

$$x' = \varphi_2(\varepsilon, \xi), \; y' = \psi_2(\varepsilon, \xi).$$

Směr posouvání jest rovnoběžný se směrem přímky P a setrvává při tom bod A na přímce P. Když se dostane průsečík $[\alpha_0 \, . \, \beta_0]$ na přímku (δ_0), vytkne nám bod $[\varepsilon_0 \, . \, \xi_0]$ přímku (γ_0). — Vzorná rovnice jest:

$$\left.\begin{aligned}[f_1(\gamma) \, . \, \varphi_2(\varepsilon, \xi) + g_1(\gamma) \, . \, \psi_2(\varepsilon, \xi) + h_1(\gamma)] \, . \, [a\, g_2(\delta) - b f_2(\delta)] + \\ + [f_2(\delta) \, . \, \varphi_1(\alpha, \beta) + g_2(\delta) \, . \, \psi_1(\alpha, \beta) + h_2(\delta)][a\, g_1(\gamma) - b f_1(\gamma)] + \\ + C\,[g_1(\gamma) \, . f_2(\delta) - g_2(\delta) \, . f_1(\gamma)] = 0\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

kde $$C = a m + b n + c.\text{*)}$$

V praxi ovšem vyžaduje přeměna transparentálního nomogramu v superposiční pravítko většinou ještě technicko-mechanické adaptace podle povahy konstant, jež nutno při specialisaci přibrati. Užití superposičních pravítek početních může však míti dobrou budoucnost, najde-li se vhodná technická úprava, která dovolí konstruovati si takové pravítko z předem upraveného materiálu, na němž by již nebylo třeba pracovati řemeslně. – Ve zmíněném článku podal jsem již schematický náčrt (pro rovnici Keplerovu, obr. 3.), dle něhož možno si představiti způsob konstrukce superposičních pravítek.

*

Les règles calculatoires à superposition des plans.

(Extrait de l'article précédent.)

J' appelle règle à superposition avec un transparent une règle à calcul, audessus du tiroir de la quelle est tendu, aux bords, un transparent, et sur le tiroir et le transparent de la quelle sont disposés les systèmes des éléments monographiques (points et lignes); en les faisant correspondre mutuellement, nous fixons le

*) Ke konstantám v obou posledních typech jest podotknouti, že je-li dána určitá rovnice typu (4), jsou dvě z konstant m, n, c dle povahy konstant a, b, C vhodně volitelné; při typu (3) zůstává rovněž jedna z konstant b_1, b_2 arbitrární.

tiroir dans une position déterminée par rapport au transparent et nous resolvons l'équation du type donné. Je déduis quelques formules pour des types fondamentaux des règles de cette espèce et je renvois en même temps à mon article „Les abaques à plusieurs plans superposés“ (t. LI de ce journ.), où l'on trouve une figure schématique d'une règle à calcul pour l'équation de Kepler. On peut, en effet, considérer les règles à superposition comme un cas particulier des abaques à plusieurs plans superposés.

Vektorová analyse a integrální rovnice.

Napsal *Bohuslav Hostinský*.

1. Nauka o integrálních rovnicích podává jednotnou methodu pro velikou řadu rozmanitých problémů. Vyjděme od nejjednodušší úlohy sem spadající: řešiti soustavu n lineárních rovnic

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

o n neznámých $x_1, x_2 \ldots x_n$. Tato úloha zahrnuje v sobě, je-li n nekonečně veliké, rozličné úlohy, jež se týkají integrace differenciálních rovnic lineárních (obyčejných i parciálních) libovolného řádu za daných krajových podmínek, jakož i obecných rovnic integrálních lineárních.

V jednotlivých případech jest redukce úloh daných differenciálními rovnicemi na úlohy algebraické známa již ze starších dob (Lagrangeova theorie struny jakožto útvaru složeného z konečného počtu hmotných bodů, Fourierova theorie tepelné vodivosti ve hmotách složených z konečného počtu molekul atd.). Avšak teprve Fredholmova theorie integrálních rovnic umožnila řešiti soustavně všechny úlohy toho druhu methodami obdobnými známým methodám, jimiž se řeší soustava rovnic (1).

Fredholm ukázal též, že soustava lineárních integrálních rovnic dá se jednoduchým způsobem převésti na jedinou integrální rovnici (viz níže, odst. **4.**).

Mějme ku př. tři integrální rovnice pro tři neznámé funkce a považujme tyto funkce za složky neznámého vektoru. Dané tři rovnice mohou býti převedeny buď na jedinou skalární integrální rovnici (zmíněnou methodou Fredholmovou), aneb na jedinou vektorovou integrální rovnici (viz odst. **5.**). Je velice pozoruhodno, že obě tyto rovnice jsou formálně stejné; celý výpočet, kterým se úloha řeší na základě Fredholmovy methody, je formálně stejný s výpočtem, kterého je třeba k řešení úlohy užitím vektorové analyse. Myslím, že tato souvislost není známa; v následujících řádcích vyložím ji vycházeje z jednoduché úlohy algebraické.