Gabriel Blažek

Dva vzorce pro krychlový obsah čtyrstěnu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 272--274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123233

Dva vzorce pro krychlový obsah čtyrstěnu.

(Podává *G. Blažek.*)

Mezi vzdáleností dvou přímek v prostoru a rozměry čtyrstěnu panuje zajímavá souvislost, jiož lze, jak následuje, zcela všeobecně dokázati.

Buďtež

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=r$$

a
$$\frac{\xi-\xi_1}{\alpha}=\frac{\eta-\eta_1}{\beta}=\frac{\zeta-\zeta_1}{\gamma}=\varrho \tag{1}$$

rovnice dvou přímek P a Π, z nichž první, vedená bodem C_1 (x_1, y_1, z_1), uzavírá s osami pravoúhlé soustavy úhly, jichž kosinusy jsou a, b, c, druhá, obsahující bod Γ_1 (ξ_1, η_1, ζ_1), tvoří s osami úhly kosinusů α, β, γ. Jak známo, jsou tedy v těchto rovnicích objevující se veličiny vázány rovnicemi

$$\begin{gathered} a^2+b^2+c^2=1, \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2, \\ (\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2=\varrho^2, \end{gathered} \tag{2}$$

a jest dále

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=cos\varphi, \tag{3}$$

znamená-li φ úhel přímek P a Π.

Nejkratší mezi P a Π vedená přímka stojí kolmo na obou přímkách; má-li tedy s první bod (x, y, z), s druhou bod (ξ, η, ζ) společný, panují výminečné rovnice

$$\begin{gathered} a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)=0, \\ \alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)=0; \end{gathered}$$

vřadíme-li do nich za rozdíly souřadnic z (1) plynoucí hodnoty

$$\begin{gathered} x-\xi=x_1-\xi_1+ar-\alpha\varrho, \\ y-\eta=y_1-\eta_1+br-\beta\varrho, \\ z-\zeta=z_1-\zeta_1+cr-\gamma\varrho, \end{gathered} \tag{4}$$

obdržíme, majíce zřetel k rovnicím (2) a (3),

$$\begin{gathered} a(x_1-\xi_1)+b(y_1-\eta_1)+c(z_1-\zeta_1)+r-\varrho\cos\varphi=0, \\ \alpha(x_1-\xi_1)+\beta(y_1-\eta_1)+\gamma(z_1-\zeta_1)+r\cos\varphi-\varrho=0, \end{gathered}$$

a z těchto rovnic pak

$$r \sin^2\varphi = (x_1 - \xi_1)(\alpha \cos\varphi - a) + (y_1 - \eta_1)(\beta \cos\varphi - b) + \\ + (z_1 - \zeta_1)(\gamma \cos\varphi - c),$$

$$\varrho \sin^2\varphi = (x_1 - \xi_1)(\alpha - a \cos\varphi)(y_1 - \eta_1)(\beta - b \cos\varphi) + \\ + (z_1 - \zeta_1)(\gamma - c \cos\varphi).$$

Položíme-li konečně hodnoty veličin r a ϱ do rovnic (4), najdeme

$$\frac{x-\xi}{b\gamma - c\beta} = \frac{y-\eta}{c\alpha - a\gamma} = \frac{z-\zeta}{a\beta - b\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - \xi_1, & a, & \alpha \\ y_1 - \eta_1, & b, & \beta \\ z_1 - \zeta_1, & c, & \gamma \end{vmatrix}}{\sin^2\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi},$$

v čemž znamená R hledanou nejkratší vzdálenost přímek P a Π.

Je-li dále přímka P vedena bodem druhým C_2 (x_2, y_2, z_2), přímka Π bodem Γ_2 (ξ_2, η_2, ζ_2), a položíme-li vzdálenost $C_1C_2 = r_1$, $\Gamma_1\Gamma_2 = \varrho_1$, pak jest

$$\frac{x_1 - x_2}{a} = \frac{y_1 - y_2}{b} = \frac{z_1 - z_2}{c} = r_1,$$

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\alpha} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\beta} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\gamma} = \varrho_1.$$

Vřadíme-li konečně z těchto rovnic plynoucí hodnoty veličin a, b, c, α, β, γ do předcházejícího determinantu a nazveme-li $\varDelta$ krychlový obsah tetraëdru $C_1C_2\Gamma_1\Gamma_2$, pak najdeme snadno

$$r_1\varrho_1 R \sin\varphi = \begin{vmatrix} x_1 - \xi_1, & x_1 - x_2, & \xi_1 - \xi_2 \\ y_1 - \eta_1, & y_1 - y_2, & \eta_1 - \eta_2 \\ z_1 - \zeta_1, & z_1 - z_2, & \zeta_1 - \zeta_2 \end{vmatrix} = 6\varDelta.$$

Krychlový obsah čtyrstěnu dá se tedy vyjádřiti šestým dílem součinu dvou hran protilehlých se sinusem sklonu jejich a nejkratší vzdáleností obou.

Poučku tuto, již dávno známou, dokázal analytickým spůsobem *Grunert* *), ovšem na základě zvláštní polohy soustavy souřadnic, čímž vzorce se stanou kratšími avšak nesouměrnými. V novější době zanášel se se stejným předmětem *Günther* **), jenž na konci pojednání svého uvádí důkaz poučky, pocházející od prof. *Kleina*, jak tvrdí nejkratší.

---

*) *Grunert* „Analytischer Beweis eines bekannten Satzes vom Inhalte des Tetraeders.“ Grunert's Archiv, T. 45, p. 67.

*) *Günther* „Einfacher Beweis eines Satzes vom Tetraederinhalte.“ Grunert's Archiv, T. 56. p. 25.

Poslední tuto vlastnost bych však přisoudil následujícímu důkazu elementárnímu.

Čtyrstěn $C_1C_2\Gamma_1\Gamma_2$ (obr. 31) dá se vždy doplniti na trojboký hranol $C_1C_2C_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, jehož třetím dílem jest, sestrojí-li se $C_1C_3 \# \Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_2\Gamma_3 \# C_1C_2$, a utvoří-li se rovnoběžník $C_2C_3\Gamma_1\Gamma_3$.

Výška hranolu jest zároveň vzdáleností hran C_1C_2 a $\Gamma_1\Gamma_2$, tedy R, úhel $C_3C_1C_2$ úhlem přímek C_1C_2 a $\Gamma_1\Gamma_2$, tedy φ; z těchto příčin máme

$$\Delta = \frac{1}{3} R \,.\, C_1C_2C_3 = \frac{1}{6} R \,.\, C_1C_2 \,.\, C_1C_3 \sin\varphi = \frac{1}{6} Rr_1\varrho_1 \sin\varphi.$$

Mimochodem budiž poukázáno k tomu, že podobný názor vede k jednoduchému vyjádření krychlového obsahu čtyrstěnu pomocí nejkratších vzdáleností R_1, R_2, R_3 hran protilehlých a úhlů A_1, A_2, A_3, jež tyto mezi sebou uzavírají.

Neboť každý čtyrstěn $C_1C_2\Gamma_1\Gamma_2$ (obr. 32) lze také vyobraziti co šestý díl rovnoběžnostěnu $C_1C_3C_2C_4\Gamma_1\Gamma_4\Gamma_2\Gamma_3$, jehož roviny rovnoběžné mají vzdálenosti R_1, R_2, R_3 a tvoří mezi sebou úhly A_1, A_2, A_3; zcela elementární poučky sferické trigonometrie vedou nás k výsledku, že položí-li se

$$2S = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$\Pi = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 A_1 - \cos^2 A_2 - \cos^2 A_3 - 2\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3)$$
$$= -\cos S \cos(S - A_1)\cos(S - A_2)\cos(S - A_3),$$

obsah krychlový rovnoběžnostěnu jest

$$6\Delta = \frac{R_1R_2R_3}{2\sqrt{\Pi}}.$$

Z toho plynoucí vzorec

$$\Delta = \frac{R_1R_2R_3}{12\sqrt{\Pi}}$$

řeší tedy svrchu naznačený úkol.