Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Vodička

O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 3, 305--318

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123228`

do rovin xz (v dolejší části obrazce), yz (v hořejší části) a příslušné obrysy paraboloidu. Mimo vrchol A, kde jest maximální křivost $= \frac{1}{6}$, jsou zobrazeny tři čáry, na nichž má křivost hodnoty

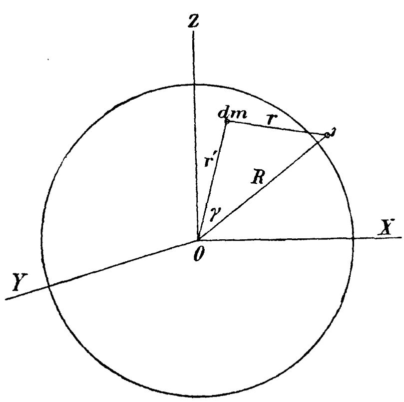
$$\frac{1}{60}, \frac{1}{600} \text{ a } \frac{1}{6000}.$$

O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční.

Dr. Karel Vodička.

(Pokračování.)

Sploštění země z pokusů kyvadlových. Při theoretickém výpočtu tíže vyjdeme z okolnosti, že gravitační pole zemské má centrum svoje v těžišti, které tedy při výpočtu potenciálu W



Obr. 3.

zvolíme za počátek souřadnicového systému. Pak mějž element zemský dm ve vzdálenosti r' od těžiště souřadnice x, y, z, bod potenciálový pak ve vzdálenosti R v blízkosti povrchu země souřadnice ξ, η, ζ (obr. 3.). Vzdálenost bodu potenciálového od elementu dm budiž r a úhel $\widehat{Rr'}$ budiž γ.

Pak platí:

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$
$$= r'^2 + R^2 - 2r'R \cos\gamma$$
$$r'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

tedy

$$\cos\gamma = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{Rr'}.$$

Je-li $R > r'$, bude

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left[1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{R}\left[1 + \left(\frac{r'}{R}\right)\overline{Q}_1(\gamma) + \left(\frac{r'}{R}\right)^2\overline{Q}_2(\gamma) + \dots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r'}{R}\right)^n\overline{Q}_n(\gamma) + \dots\right],$$

kde $\overline{Q}_n(\gamma)$ značí sférickou funkci argumentu γ definovanou rozvojem (*Koláček*: Elektřina a mag. str. 195)

$$\overline{Q}_n(\gamma) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2n-1)}{n!}\left[\cos^n\gamma - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\gamma\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\gamma + \dots\right].$$

Je-li $R < r'$, bylo by

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'}\left[1 + \left(\frac{R}{r'}\right)\overline{Q}_1(\gamma) + \left(\frac{R}{r'}\right)^2\overline{Q}_2(\gamma) + \dots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{R}{r'}\right)^n\overline{Q}_n(\gamma) + \dots\right],$$

a pro $R = r'$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}[1 + \overline{Q}_1(\gamma) + \overline{Q}_2(\gamma) + \dots + \overline{Q}_n(\gamma) + \dots].$$

Řady tyto konvergují absolutně (*Koláček*: El. a mag.; *Helmert*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodaesie II. str. 51., 57.).

Zavedeme-li souřadnice polární, a to pro bod potenciálový (R, φ', λ), pro element zemský $(r', \varphi'_1, \lambda_1)$, kde φ' a φ'_1 značí geocentrické šířky, λ a λ_1 geocentrické délky, bude

$$\begin{aligned} \xi &= R \cos \varphi' \cos \lambda & x &= r' \cos \varphi'_1 \cos \lambda_1 \\ \eta &= R \cos \varphi' \sin \lambda & y &= r' \cos \varphi'_1 \sin \lambda_1 \\ \zeta &= R \sin \varphi' & z &= r' \sin \varphi'_1 . \end{aligned}$$

Pak

$$\cos \gamma = \cos \varphi'_1 \cos \varphi' \cos (\lambda_1 - \lambda) + \sin \varphi'_1 \sin \varphi'$$

$$\overline{Q}_1(\gamma) = \cos \gamma = \sin \varphi'_1 \sin \varphi' + \cos \varphi'_1 \cos \varphi' \cos (\lambda_1 - \lambda)$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_2(\gamma) = {} & \tfrac{3}{2} \cos^2 \gamma - \tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{4} (\sin^2 \varphi'_1 - \tfrac{1}{3}) (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{3}) \\ & + 3 \sin \varphi'_1 \cos \varphi'_1 \sin \varphi' \cos \varphi' \cos (\lambda_1 - \lambda) \\ & + \tfrac{3}{4} \cos^2 \varphi'_1 \cos^2 \varphi' \cos 2 (\lambda_1 - \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_3(\gamma) = {} & \tfrac{5}{2} \cos^3 \gamma - \tfrac{3}{2} \cos \gamma \\ = {} & \tfrac{25}{4} (\sin^3 \varphi'_1 - \tfrac{3}{5} \sin \varphi'_1) (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{5} \sin \varphi') \\ & + \tfrac{75}{8} (\sin^2 \varphi'_1 - \tfrac{1}{5}) (\sin^2 \varphi - \tfrac{1}{5}) \cos \varphi'_1 \cos \varphi' \cos (\lambda_1 - \lambda) \\ & + \tfrac{15}{4} \sin \varphi'_1 \cos^2 \varphi'_1 \sin \varphi' \cos^2 \varphi' \cos 2 (\lambda_1 - \lambda) \\ & + \tfrac{5}{8} \cos^3 \varphi'_1 \cos^3 \varphi' \cos 3 (\lambda_1 - \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_4(\gamma) = {} & \tfrac{35}{8} \cos^4 \gamma - \tfrac{30}{8} \cos^2 \gamma + \tfrac{3}{8} \\ = {} & \tfrac{1225}{64} (\sin^4 \varphi'_1 - \tfrac{6}{7} \sin^2 \varphi'_1 + \tfrac{3}{35}) (\sin^4 \varphi' - \tfrac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \tfrac{3}{35}) \\ & + \tfrac{245}{8} (\sin^3 \varphi'_1 - \tfrac{3}{7} \sin \varphi'_1) (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{7} \sin \varphi') \cos \varphi'_1 \\ & \qquad \cos \varphi' \cos (\lambda_1 - \lambda) \\ & + \tfrac{245}{16} (\sin^2 \varphi'_1 - \tfrac{1}{7}) (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{7}) \cos^2 \varphi'_1 \cos^2 \varphi' \\ & \qquad \cos 2 (\lambda_1 - \lambda) \\ & + \tfrac{35}{8} \sin \varphi'_1 \cos^3 \varphi'_1 \sin \varphi' \cos^3 \varphi' \cos 3 (\lambda_1 - \lambda) \\ & + \tfrac{35}{64} \cos^4 \varphi'_1 \cos^4 \varphi' \cos 4 (\lambda_1 - \lambda) \ldots \text{atd.} \end{aligned}$$

Pro body mimo hmotu zemskou jest $R > r'$, a ježto potenciál země má tvar

$$\Pi = k^2 \int \frac{dm}{r},$$

lze pro něj psáti rozvoj

$$\Pi = \frac{k^2}{R} \left[\int dm + \frac{1}{R} \int r' \overline{Q}_1(\gamma)\, dm + \ldots + \frac{1}{R^n} \int r'^n \overline{Q}_n(\gamma)\, dm + \ldots \right], \tag{13}$$

při čemž integrace se vztahuje na prostor zemí vyplněný.

Položíme-li

$$\int r'^n \overline{Q}_n(\gamma)\, dm = Q_n,$$

a rozvedeme-li v $\overline{Q}_n(\gamma)$ *cos* rozdílu $(\lambda_1 - \lambda)$ a jeho násobků. dostaneme pro prvních pět členů rozvoje:

$$\int dm = m,$$

což značí hmotu zemskou,

$$Q_1 = p_{10} \sin \varphi' + (p_{11} \cos \lambda + q_{11} \sin \lambda) \cos \varphi'$$

$$Q_2 = p_{20} (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{3}) + (p_{21} \cos \lambda + q_{21} \sin \lambda) \sin \varphi' \cos \varphi' \\ + (p_{22} \cos 2\lambda + q_{22} \sin 2\lambda) \cos^2 \varphi'$$

$$Q_3 = p_{30} (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{5} \sin \varphi') + (p_{31} \cos \lambda + q_{31} \sin \lambda) \\ (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{5}) \cos \varphi' + (p_{32} \cos 2\lambda + q_{32} \sin 2\lambda) \sin \varphi' \cos^2 \varphi' \\ + (p_{33} \cos 3\lambda + q_{33} \sin 3\lambda) \cos^3 \varphi'$$

$$Q_4 = p_{40} (\sin^4 \varphi' - \tfrac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \tfrac{3}{35}) + (p_{41} \cos \lambda + q_{41} \sin \lambda) \\ (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{7} \sin \varphi') \cos \varphi' + (p_{42} \cos 2\lambda + q_{42} \sin 2\lambda) \\ (\sin \varphi' - \tfrac{1}{7}) \cos^2 \varphi' + (p_{43} \cos 3\lambda + q_{43} \sin 3\lambda) \sin \varphi' \cos^3 \varphi' \\ + (p_{44} \cos 4\lambda + q_{44} \sin 4\lambda) \cos^4 \varphi',$$

při čemž

$$p_{10} = \int r' \sin \varphi'_1\, dm, \qquad p_{11} = \int r' \cos \varphi'_1 \cos \lambda_1\, dm,$$

$$q_{11} = \int r' \cos \varphi'_1 \sin \lambda_1\, dm,$$

$$p_{20} = \tfrac{9}{4} \int r'^2 (\sin^2 \varphi'_1 - \tfrac{1}{3})\, dm = \tfrac{8}{7} \int r'^2 (1 - \tfrac{3}{2} \cos^2 \varphi'_1)\, dm,$$

$$p_{21} = 3 \int r'^2 \sin \varphi'_1 \cos \varphi'_1 \cos \lambda_1\, dm,$$

$$q_{21} = 3 \int r'^2 \sin \varphi'_1 \cos \varphi'_1 \sin \lambda_1\, dm,$$

$$p_{22} = \tfrac{3}{4} \int r'^2 \cos^2 \varphi'_1 \cos 2\lambda_1\, dm,$$

$$q_{22} = \tfrac{3}{4} \int r' \cos^2 \varphi'_1 \sin 2\lambda_1\, dm, \qquad \text{atd.}$$

Vrátíme-li se opět k souřadnicím pravoúhlým, bude

$$p_{10} = \int z dm, \quad p_{11} = \int x dm, \quad q_{11} = \int y dm,$$

$$p_{20} = \tfrac{3}{2}\int\left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) dm,$$

$$p_{21} = 3\int xz\, dm, \quad q_{21} = 3\int yz\, dm,$$

$$p_{22} = \tfrac{3}{4}\int (x^2 - y^2)\, dm, \quad q_{22} = \tfrac{3}{2}\int xy\, dm, \quad \text{atd.}$$

Ježto těžiště jsme zvolili za počátek souřadnicového systému, jest $p_{10} = p_{11} = q_{11} = 0$, t. j. $Q_1 = 0$, a předpokládáme-li, že částečky zemské jsou vůči sobě v relativním klidu, že země jest tělesem tuhým, bude i $p_{21} = q_{21} = q_{22} = 0$. Jsou-li hlavní momenty setrvačnosti rotující země A, B, C, bude

$$A = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \int (z^2 + x^2)\, dm,$$

$$C = \int (x^2 + y^2)\, dm, \quad \text{to jest}$$

$$\int x^2\, dm = \frac{B + C - A}{2}, \quad \int y^2\, dm = \frac{C + A - B}{2},$$

$$\int z^2\, dm = \frac{A + B - C}{2}, \quad \text{tedy}$$

$$p_{20} = \tfrac{3}{2}\frac{A + B - 2C}{2}, \quad p_{22} = \tfrac{3}{4}(B - A),$$

$$Q_2 = \tfrac{3}{2}\left(\frac{A + B}{2} - C\right)(sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{3}) + \tfrac{3}{4}(B - A)\, cos^2 \varphi'\, cos\, 2\lambda.$$

Dosadíme-li tyto výsledky do rovnice (13), obdržíme

$$\Pi = \frac{k^2}{R}\left[m + \frac{3}{2R^2}\left(\frac{A + B}{2} - C\right)(sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{3}) + \frac{3\,(B - A)}{4R^2}\, cos^2 \varphi'\, cos\, 2\lambda + \frac{Q_3}{R^3} + \ldots + \frac{Q_n}{R^n} + \ldots\right].$$

Výraz tento značí potenciál v bodě (R, φ', λ), pocházející od hmoty zemské, a derivací jeho dle normály obdržíme zdánlivou tíži, dle Clairauta *gravité*. Tu na zemi pozorovati nemůžeme, ježto vlivem rotace zemské působí na bod potenciálový ještě síla centrifugální. Pro problém dle rovnice (3) potřebujeme potenciál W, jehož derivací obdržíme tíži pozorovanou, dle Clairauta *pesanteur*. Píšeme-li tedy

$$P = \frac{\omega^2}{2}\left(\xi^2 + \eta^2\right) = \frac{\omega^2}{2} R^2 \cos^2 \varphi',$$

bude

$$W = \frac{mk^2}{R}\left[1 + \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi'}{2mk^2} + \frac{1 - 3\sin^2\varphi'}{2mR^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3(B-A)}{4mR^2} \cos^2\varphi' \cos 2\lambda + \frac{Q_3}{mR^3} + \frac{Q_4}{mR^4} + \dots\right],$$

kterýžto výraz položen veličině konstantní, určoval by dle (3) mathematický povrch zemský. Ježto však dle předchozího má země tvar přibližně kulový, bude v blízkosti povrchu zemského konstantnímu R odpovídati velice přibližně konstantní W, t. j. první členy tohoto výrazu musí převládati nad ostatními členy periodickými, a můžeme tudíž s velkým přiblížením psáti

$$W = \frac{mk^2}{R}\left[1 + \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi'}{2mk^2} + \frac{1 - 3\sin^2\varphi'}{2mR^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3(B-A)}{4mR^2} \cos^2\varphi' \cos 2\lambda\right]. \qquad (15)$$

Chceme-li z tohoto výrazu stanoviti směr a velikost tíže na zemi pozorované g (pesanteur), nutno dle (12) výraz (15) differencovati dle normály; za tím účelem si představme, že při stálém φ' a λ posune se bod potenciálový ve směru R o dR, pak při stálém R a λ v meridiánovém kruhu o poloměru R o $Rd\varphi'$, a konečně v parallelu kolmém na osu z při stálém R a φ' o $R \cos \varphi' d\lambda$. Pak budou výrazy

$$g_1 = \frac{\partial W}{\partial R}, \quad g_2 = \frac{\partial W}{R\partial\varphi}, \quad g_3 = \frac{\partial W}{R\cos\varphi\partial\lambda}$$

komponenty g padající do těchto tří směrů na sobě kolmých, a tedy

$$g^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2.$$

Ve výrazech pro g_2 a g_3 vyskytují se jen členy periodické, které tedy za supposice, za které byl zjednodušen výraz (15), můžeme v rozvoji

$$g = -g_1\left(1 + \frac{g_2^2 + g_3^2}{2g_1^2} + \ldots\right)$$

vynechati. Hodnotu pro g píšeme proto se znaménkem záporným, že pozorovaná tíže má směr ke středu země, kdežto g_1 čítáme kladně ve směru rostoucího R. Bude tedy až na veličiny vyšších řádů

$$g = -\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{mk^2}{R^2}\Bigg[1 - \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi'}{mk^2}$$
$$+ \frac{3(1 - 3\sin^2\varphi')}{2mR^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right) \tag{16}$$
$$+ \frac{9(B-A)}{4mR^2}\cos^2\varphi' \cos 2\lambda\Bigg].$$

Tíže na povrchu zemském zkoumá se kyvadlem, které právem *A. v. Humboldt* zove přístrojem geognostickým. Souvislost mezi gravitací a délkou sekundového kyvadla l, udávajícího sekundy času středního a kývajícího v malých amplitudách, udává rovnice

$$g = \pi^2 l.$$

Pro délku tu, redukovanou na hladinu mořskou a na vakuum, stanoveny byly následující hodnoty:

R. 1799 *La Place* (Traité de mécanique céleste, Paris 1799—1825) z pozorování na 15 stanicích v šířkách $+67^0 5'$ až $-33^0 56'$ odvodil

$$l = 0{\cdot}990631 + 0{\cdot}005637 \sin^2 \varphi.$$

R. 1816 *Mathieu* (Sur les experiences du pendule ... Con. de Temps 1816) z pozorování na 31 stanici v šířkách $+74^0 53'$ až $-51^0 21'$

$$l = 0{\cdot}990743 + 0{\cdot}005466 \sin^2 \varphi.$$

R. 1821 *Biot* (Recueil d'observations géodésiques ... Paris 1821) z pozorování na 8 stanicích v šířkách $+38^0 40'$ až $+60^0 45'$:

$$l = 0{\cdot}990880 + 0{\cdot}005340 \sin^2 \varphi.$$

R. 1825 *Sabine* (An account of experiments to determine the figure . . . London 1825) z pozorování na 13 stanicích v šířkách $+ 79^0 50'$ až $- 12^0 59'$:

$$l = 0{\cdot}990989 + 0{\cdot}005134 \sin^2 \varphi,$$

a kombinoval-li svá pozorování s pozorováními konanými při anglickém a francouzském měření stupňovém, našel z 25 stanic mezi $+ 79^0 50'$ až $- 12^0 59'$:

$$l = 0{\cdot}990977 + 0{\cdot}005142 \sin^2 \varphi.$$

R. 1827 *Saigey* (Comparaison des observations du pendule . . . Paris 1827) z pozorování na 14 stanicích v šířkách $+ 79^0 50'$ až $- 51^0 35'$:

$$l = 0{\cdot}991026 + 0{\cdot}005072 \sin^2 \varphi.$$

R. 1829 *Pontécoulant* (Théorie analytique du système du monde T. 2. Paris 1829) z pozorování na pěti stanicích v šířkách $+ 0^0$ až $+ 67^0 4'$:

$$l = 0{\cdot}990555 + 0{\cdot}005679 \sin^2 \varphi.$$

R. 1830 *Airy* (Figure of the earth. Encyklopaedia Metropolitana, London 1825) z pozorování na 49 stanicích v šířkách $+ 79^0 50'$ až $- 51^0 35'$:

$$l = 0{\cdot}991017 + 0{\cdot}005087 \sin^2 \varphi.$$

R. 1833 *Poisson* (Traité de mécanique, Paris 1833; *Puissant,* Traité de géodésie . . . Paris 1842) z experimentů *Bordových*, konaných v Paříži při sploštění $\varepsilon = 1 : 288$:

$$l = 0{\cdot}990941 + 0{\cdot}005142 \sin^2 \varphi.$$

R. 1869 *Unferdinger* (Grunert's Archiv 1869, 49. Theil) z pozorování na 51 stanici v šířkách $+ 79^0 50'$ až $- 51^0 35'$:

$$l = 0{\cdot}990970 + 0{\cdot}005185 \sin^2 \varphi.$$

R. 1872 *Listing* (Ueber unsere jetzige Kenntniss . . . Göttingen 1872) přiměřeným spojením jemu známých výsledků

$$l = 0{\cdot}990995 + 0{\cdot}005134 \sin^2 \varphi.$$

R. 1876 *Fischer* (Die Gestalt der Erde und die Pendelmessungen. Astr. Nachr. 83) z pozorování na 73 stanicích v šířkách $+ 79^0 50'$ až $- 62^0 56'$:

$$l = 0{\cdot}991011 + 0{\cdot}005105 \sin^2 \varphi.$$

R. 1884 *Helmert* (Die mathematischen und phys Theorien der höh. Geodaesie. Leipzig 1884) z pozorování na 123 stanicích v šířkách $+ 79^0 50'$ až $- 62^0 56'$:

$$l = 0{\cdot}990918 + 0{\cdot}005262 \sin^2 \varphi.$$

R. 1884 *G. W. Hill* (Astronomical papers . . . Washington 1884) uživ serií pozorování u *Fischera* našel:

$$\begin{aligned} l = {} & 0{\cdot}9927148 + 0{\cdot}0050890\, \varrho^{-4} (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{3}) \\ & + 0{\cdot}0000979\, \varrho^{-4} \cos^2 \varphi' \cos (2\lambda + 29^0 4') \\ & - 0{\cdot}0001355\, \varrho^{-5} (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{5} \sin \varphi') + 0{\cdot}0005421\, \varrho^{-5} \\ & (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{5}) \cos \varphi' \cos (\lambda + 217^0 51') \\ & + 0{\cdot}0002640\, \varrho^{-5} \sin \varphi' \cos^2 \varphi' \cos (2\lambda + 4^0 49') \\ & + 0{\cdot}0001248\, \varrho^{-5} \cos^3 \varphi' \cos (3\lambda + 110^0 24') \\ & + 0{\cdot}0001489\, \varrho^{-6} (\sin^4 \varphi' - \tfrac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \tfrac{3}{35}) \\ & + 0{\cdot}0007386\, \varrho^{-6} (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{7} \sin \varphi') \cos \varphi' \cos (\lambda + 3^0 2') \\ & + 0{\cdot}0002175\, \varrho^{-6} (\sin^2 \varphi' - \tfrac{1}{7} \cos^2 \varphi') \cos (2\lambda + 262^0 17') \\ & + 0{\cdot}0003126\, \varrho^{-6} \sin \varphi' \cos^3 \varphi' \cos (3\lambda + 148^0 20') \\ & + 0{\cdot}0000584\, \varrho^{-6} \cos^4 \varphi' \cos (4\lambda + 248^0 19'), \end{aligned}$$

kde φ' jest geocentrická šířka, λ geografická délka a ϱ takový faktor, že radius země v místě (φ', λ) jest $a\varrho$.

R. 1891 *Harkness* (On the solar parallax . . .) odvodil:

$$l = 0{\cdot}990947 + 0{\cdot}005214 \sin^2 \varphi.$$

V Annuaire publié par le Bureau des Longitudes od r. 1897 uveřejňováno jest

$$l = 0{\cdot}981027 + 0{\cdot}005072 \sin^2 \varphi.$$

Přehled nejdůležitějších pozorování podává též *Marbach*, Phys. Lexikon, čl. Pendel. Pro délku kyvadla možno tedy stanoviti výraz $l = l_0 (1 + \sin^2 \varphi)$.

Bude proto i

$$g = g_0 (1 + f \sin^2 \varphi) \tag{17}$$

nezávisle na zeměpisné délce, a abychom rovnici (16) uvedli v souhlas s pozorováním, položíme $A = B$. Pak bude

$$g = \frac{mk^2}{R} \left[1 + \frac{3 (C - A)}{2m R^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') - \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi'}{mk^2} \right] \tag{18}$$

$$W = \frac{mk^2}{R^2} \left[1 + \frac{C - A}{2m R^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi'}{2m k^2} \right]. \tag{19}$$

Výrazy tyto odvozeny byly vzhledem k těžišti, a jest v nich tedy geocentrická šířka φ' vzhledem k těžišti identická s geografickou šířkou φ ve vzorci (17). Současně z nich vychází, že pro geografickou šířku φ_0, hovící relaci

$$1 - 3\, sin^2\, \varphi_0 = 0 \tag{20}$$

bude urychlení identické s urychlením, které by jednotce hmotné udělila země kulová o poloměru R_0, této šířce φ_0 příslušnému.

Pro povrch zemský musí $W = W_0$ býti konstantní, a označíme-li aequatoreální poloměr této plochy a, bude až na veličiny vyšších řádů dle rovnice (19) její radius vektor R určen rovnicí

$$R = \frac{mk^2}{W_0}\left[1 + \frac{C - A}{2m\,a^2}\,(1 - 3\, sin^2\, \varphi') + \frac{\omega^2 a^3\, cos^2\, \varphi'}{2m\,k^2}\right],$$

a spojíme-li členy stálé a periodické zvláště,

$$R = \frac{mk^2}{W_0}\left[1 + \frac{C - A}{2m\,a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2m\,k^2} + \ldots\right]$$
$$\left[1 - \left(\frac{3\,(C - A)}{2m\,a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2m\,k^2}\right) sin^2\, \varphi' + \ldots\right].$$

Při tom patrně součin prvních dvou faktorů značí R pro $\varphi' = 0$, tedy aequatoreální poloměr a, tudíž

$$R = a\left[1 - \left(\frac{3\,(C - A)}{2m\,a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2m\,k^2}\right) sin^2\, \varphi' + \ldots\right]. \tag{21}$$

Urychlení g pro povrch zemský můžeme tedy psáti

$$g = \frac{W_0^2}{mk^2} \cdot \frac{1 + \dfrac{3\,(C - A)}{2m\,a^2}\,(1 - 3\, sin^2\, \varphi') - \dfrac{\omega^2 a^3\, cos^2\, \varphi'}{mk^2}}{\left[1 + \dfrac{C - A}{2m\,a^2}\,(1 - 3\, sin^2\, \varphi') + \dfrac{\omega^2 a^3\, cos^2\, \varphi'}{2m\,k^2}\right]^2}$$
$$= \frac{W_0^2}{mk^2}\left[1 + \frac{C - A}{2m\,a^2}\,(1 - 3\, sin^2\, \varphi') - \frac{2\omega^2 a^3\, cos^2\, \varphi'}{mk^2} - \ldots\right],$$

a oddělíme-li opět členy stálé od periodických,

$$g = \frac{W_0^2}{mk^2}\left[1 + \frac{C - A}{2m\,a^2} - \frac{2\omega^2 a^3}{mk^2} - \ldots\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{2\omega^2 a^3}{mk^2} - \frac{3\,(C - A)}{2m\,a^2}\right) sin^2\, \varphi' + \ldots\right].$$

Při tom opět součin prvních dvou faktorů značí g pro $\varphi' = 0$, tedy g_0, a jest tudíž

$$g = g_0 \left[1 + \left(\frac{2\omega^2 a^3}{mk^2} - \frac{3(C - A')}{2m a^2}\right) sin^2 \varphi' + \ldots\right]. \quad (22)$$

Srovnáme-li rovnici (21) s rovnicí sub (11) a rovnici (22) s rovnicí (17) a uvážíme-li, že poslední výrazy odvozeny jsou vzhledem k těžišti, obdržíme tyto vztahy:

$$\varepsilon = \frac{3(C - A)}{2m a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2m k^2}$$

$$f = \frac{3(C - A)}{2m a^2} + \frac{2\omega^2 a^3}{mk^2}.$$

Jest tedy

$$\varepsilon + f = \tfrac{5}{2} \frac{\omega^2 a^3}{mk^2} = \tfrac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_0} = \tfrac{5}{2} \frac{f_0}{g_0}.$$

Protože z rovnice (17) jest

$$f = \frac{g_{90} - g_0}{g_0},$$

bude

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \tfrac{5}{2} \frac{f_0}{g_0} - \varepsilon \quad (23)$$

a rovnici (17) nebo (21) lze psáti ve tvaru

$$g_4 = g_0 + (g_{90} - g_0)\, sin^2 \varphi. \quad (24)$$

Rovnice (23) vyjadřuje theorem *Clairaut-Laplaceův*, dle něhož jest sploštění zvětšené o relativní vzrost tíže od rovníku k polu rovno $\frac{5}{2}$ síly odstředivé, měřené na rovníku a vyjádřené v jednotkách tíže na rovníku. Protože $\frac{f_0}{g_0} = \frac{1}{289}$, a dle *Helmertových* výpočtů na hladině mořské $g_{45} = 980{\cdot}5966$ cm/sec^2, z čehož $g_{90} = 983{\cdot}136$, $g_0 = 978{\cdot}057$, bude $\varepsilon = 1 : 289$, kterážto hodnota téměř splývá s hodnotou *Listingovou*.

Lépe pro určení sploštění hodí se délka kyvadla sekundového; protože $\omega = 2\pi : T$, $g = \pi^2 l$, lze rovnici (23) psáti ve tvaru

$$f = \frac{10a}{T^2 l} - \varepsilon$$

a tudíž

$$l = l_0 \left[1 + \left(\frac{10a}{T^2 l} - \varepsilon\right) sin^2\, \varphi\right], \tag{25}$$

z kteréž rovnice lze stanoviti ε.

Tímto způsobem našel:

R. 1830 *Airy* (Figure of the earth. London 1835) $\varepsilon = 1 : 282{\cdot}89$

R. 1834 *Baily* (Report on the pendulum experiments . . . Mem. R. A. Soc. 7.) $\varepsilon = 1 : 285{\cdot}26$

R. 1842 *Borenius* (Ueber die Berechnung . . . der Abplattung . . . Bull. St. Pétersb. 7) $\varepsilon = 1 : 289$

R. 1853 *Paucker* (Die Gestalt der Erde, Bull. 12, 13) $\varepsilon = 1 : 288{\cdot}38$

R. 1869 *Unferdinger* (Das Pendel als geodätisches Instrument. Grunerts Archiv) $\varepsilon = 1 : 299{\cdot}15$

R. 1872 *Listing* (Ueber unsere jetzige Kentniss der Gestalt . . . Göttingen) $\varepsilon = 1 : 288{\cdot}5$

R. 1876 *Fischer* (Die Gestalt der Erde und die Pendelmessungen. Astr. Nach.) $\varepsilon = 1 : 284{\cdot}4$

R. 1880 *Clarke* (Geodesy. Oxford 1880) $\varepsilon = 1 : (292{\cdot}2 \pm 1{\cdot}5)$

R. 1884 *Helmert* (Die math. und phys. Theorien der höh. Geodaesie) $\varepsilon = 1 : (299{\cdot}26 \pm 1{\cdot}26)$

R. 1884 *Hill* (Astronomical papers . . . Washington) pro sev. polokouli $\varepsilon = 1 : 285{\cdot}44$
pro jižní polokouli $\varepsilon = 1 : 290{\cdot}02.$
Výsledky v tom ohledu získané kolísají tedy mezi hodnotami 1 : 283 a 1 : 299. V „Annuaire etc.“ uveřejňována hodnota $\varepsilon = 1 : (292{\cdot}2 \pm 1{\cdot}5)$. Hodnota Helmertova z r. 1901 $\varepsilon = 1 : 298{\cdot}3$ neliší se valně od jeho dřívější hodnoty z r. 1884 $\varepsilon = 1 : 299{\cdot}3$, a nutno ji považovati za nejlepší, protože jest stanovena s větší přesností, než jest to možno při měřeních stupňových.

Bessel, Peters a *Nyrén* užili kyvadlových pokusů k stanovení jistých funkcí P a P', spojených s délkou kyvadla sekundového (*Bessel*: Fundamenta astronomicae etc. 1818, str. 130) vztahem:

$$l = 1 + P \sin^2 \varphi' + P' (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{5} \sin \varphi'),$$

při čemž délka kyvadla na rovníku vzata za jednotku; učiníme-li tak i ve vzorci (25), bude srovnáním

$$\left(\frac{10a}{T^2 l} - \varepsilon\right) \sin^2 \varphi = P \sin^2 \varphi' + P' (\sin^3 \varphi' - \tfrac{3}{5} \sin \varphi').$$

Pro poly platí $\varphi = \varphi' = \pm 90^0$, tedy

$$\varepsilon = \frac{10a}{T^2 l} - P \mp \tfrac{2}{5} P',$$

a zvolíme-li *Clarkeho* hodnotu $a = 6378253\ m$, $l = 0{\cdot}991027\ m$ dle Annuaire, bude

$$\varepsilon = 0{\cdot}00866889 - P \mp 0{\cdot}4\ P',$$

kde horní znamení vztahuje se pro severní, dolní pro jižní polokouli, pro něž ε označíme ε' a ε''.

Bessel r. 1818 (Fundamenta str. 131) našel z kyvadlových pokusů na 31 stanici

$$P = + 0{\cdot}0054448,\ P' = + 0{\cdot}0006689,$$

$$\varepsilon' = 1 : 338{\cdot}23,\ \varepsilon'' = 1 : 286{\cdot}39,\ \tfrac{1}{2} (\varepsilon' + \varepsilon'') = 1 : 310{\cdot}15.$$

Peters r. 1841 z pokusů na 54 stanicích našel

$$P = + 0{\cdot}005233,\ P' = - 0{\cdot}000334,$$

$$\varepsilon' = 1 : 280{\cdot}15,\ \varepsilon'' = 1 : 302{\cdot}82,\ \tfrac{1}{2} (\varepsilon' + \varepsilon'') = 1 : 291{\cdot}04.$$

Nyrén r. 1872 z pokusů na 74 stanicích našel

$$P = + 0{\cdot}005194,\ P' = - 0{\cdot}000134,$$

$$\varepsilon' = 1 : 283{\cdot}97,\ \varepsilon'' = 1 : 292{\cdot}29,\ \tfrac{1}{2} (\varepsilon' + \varepsilon'') = 1 : 287{\cdot}77.$$

Jiné methody k stanovení sploštění ε budou uvedeny později a zároveň bude poukázáno, jaký vliv má ε na parallaxu sluneční.

Výsledky pokusů kyvadlových souhlasí tedy daleko lépe s měřeními geodetickými, z nichž zase vychází na jevo nutnost, konati další měření jednotně a soustavně. Za tím účelem na podnět *Bayerův* (Über die Grösse und Figur der Erde, Berlin 1861) sešla se stálá kommisse středoevropského měření, která později se usnesla na názvu: „*Mezinárodní měření země*“ a která každoročně vydává své zprávy o postupu prací. Tím zavedeny práce soustavné, z nichž se seznalo, že země jest geoidem, jehož tvar závisí na seskupení hmoty zemské. Poněvadž však pro výpočty se geoid dobře nehodí, nahražuje se typickým ellipsoidem ku př. Listingovým, který s geoidem má stejný obsah a co nejméně se od něho odchyluje. Protože pak odchylky geoidu od sferoidu zůstávají v mezích $\pm$ 100 *m*, můžeme je pro účely parallaxy zanedbati a zemi považovati za rotační sferoid.

(Pokračování.)

O silovém akustickém poli.

Rozšířená přednáška o IV. sjezdu přírodozpytců a lékařů českých v Praze r. 1908.

Napsal **František Kaňka**, professor v Praze.

Část III. **Pole dvojosé.**

A. *Vzájemné akustickodynamické působení dvou osových polí. Skládání polí.*

a) Osy[1]) resonančních trubic jsou spolu rovnoběžny a před touž rozkmitnou (obr. 1.).

Obr. 1. ukazuje, že obě základní soustavy kroužkové (osové) spolu splynuly a vytvořily složené pole *spojité.* K spojitosti náleží opět vzájemná přitažlivost polí, což lze též na obrazci pozorovati, neboť jsou zbývající střední kroužky z os trubic vysunuty a k sobě sblíženy. Konáme-li pokusy tohoto druhu, měníce vzájemnou odlehlost obou trubic, ukáže se, že se zbylé střední kroužky tím více k sobě přibližují, čím jest vzájemná odlehlost menší. Přitažlivost vzniká v tomto případě vzájemným tahem *zkracujících* se vírných trubic.

Dáme-li před otvory obou trubek několik kousků dřeně ze sítiny (asi 3 *mm* dlouhých), shledáme, že se kousky točí kolem svislé osy *souhlasným* směrem na obou základních polích.

Z tohoto pokusu poznáváme, že jsou před touž rozkmitnou osová pole *stejnosměrná.* Celkem platí věty: *Stejnosměrná*

---

[1]) Poznam.: Pozorování naše budou se hlavně týkati reson trubic, jichž podélné osy jsou v rovině vodorovné.