František Kadeřávek

O křivkách čtvrtého stupně, třídy osmé a rodu jedna; jakož i jejich reciprokých

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 3, 165--167

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123210`

O křivkách čtvrtého stupně, třídy osmé a rodu jedna; jakož i jejich reciprokých.

Napsal Dr. *Kadeřávek.*

Budiž s pevný bod roviny, P libovolná jím procházející přímka, v níž ^1a, ^2a buďtež dva libovolné body. Body ^1a ^2a určují jediný vzhledem s harmonický bod a, který sdružme s dvojinou ^1a, ^2a. Vyplní-li body ^1a, ^2a dvě přímky ^1A, ^2A, tu bod sdružený a vyplní přímku A, jdoucí průsečíkem α přímek ^1A ^2A a tvořící s nimi a spojnicí $A' \equiv s\alpha$ čtveřinu harmonickou. Z toho patrno, že přímka A půjde jen tehdy bodem s, půjde-li jím některá z přímek ^1A, ^2A. Zvolíme-li místo přímek ^1A, ^2A dvě křivky ^1A, ^2A stupňů ^1m, ^2m a tříd $^1\nu$, $^2\nu$ a vyhledáme-li na všech paprscích jdoucích bodem s k dvojinám průsečíků body sdružené, obdržíme křivku A stupně obecně $^1m\,^2m = m$ a třídy $\nu = {}^1m\,^2\nu + {}^2m\,^1\nu$, jdoucí všemi $^1m\,^2m$ společnými body křivek ^1A, ^2A; neboť stanovíme-li ke křivce ^1A dle středu s souměrnou křivku $^+A \sim {}^1A$, protne křivku ^2A v $^1m\,^2m$ bodech $^+a \equiv {}^2a$, k nimž dle středu souměrné ^1a náležejí křivce ^1A. Dvojiny ^1a, $^2a \equiv {}^+a$ souměrné dle s dávají body sdružené a v nekonečnu; protíná proto úběžná přímka křivku A v $^1m\,^2m$ bodech. Kdybychom místo přímky úběžné zvolili přímku P v konečnu položenou a sestrojili ke křivce ^1A křivku kolineárnou ^+A pro bod s jakožto střed, přímku P jakožto osu a zvolili karakteristiku této kolineace $k = -1$, tu průsečíky křivek ^2A ^+A vedly by k $^1m\,^2m$ dvojinám bodů, jichž sdružené zapadají do přímky P. Tím podána konstrukce průsečíků přímky s křivkou A. Snadno bychom dovodili, že, jsou-li ^1T, ^2T tečny dvou daných křivek ^1A ^2A v bodech ^1t ^2t položených na spojnici P jdoucí polem s, že přímka T sdružená s dvojinou ^1T, ^2T, jdoucí bodem t združeným k (^1t, ^2t) a průsečíkem τ uvedených tečen je tečnou křivky A sdružené ke křivkám ^1A, ^2A v bodě t. Na základě toho možno sestrojiti i asymptoty křivky A.

Bodem s vedená tečna D ke křivce ^2A dotýkejž se v bodě ^2d. Tečna tato protíná křivku ^1A stupně ^1m v ^1m bodech ^1d, ^1e... jež s bodem ^2d dávají ^1m bodů sdružených d, e... jichž tečny se stotožňují s tečnou D; je tedy tato tečna ^1m-násobná; ježto pak bodem s lze ke křivkám ^1A, ^2A vésti $^1\nu \cdot {}^2\nu$ tečen, ^2m resp. ^1m násobných a mimo ně žádná jiná tečna křivky A bodem s neprochází, patrno, že křivka A sdružená ke křivká ^1A, ^2A je třídy $^1m\,^2\nu + {}^2m\,^1\nu$. Jsou-li křivky ^1A ^2A kolineárné dle středu s, tu část křivky sdružené je rovněž kolineárná dle středu s ke křivkám ^1A, ^2A, křivka A rozpadá se ve dvě části stupně m-tého, a $m(m-1)$, neboť zde stupeň obou křivek základních ^1A, ^2A jest týž a to m-tý. Z toho vyplývá, že dvě kuželosečky ^1A, ^2A, jichž společné tečny procházejí bodem s, dávají opět dvě kuželosečky, z nichž jedna přejde v dvojnou přímku, když kuželosečky ^1A, ^2A se dotýkají mimo to ve dvou bodech na spol. poláře bodu s.

Redukce stupně křivky A nastane v případě, kdy obě křivky ${}^1A$, ${}^2A$ procházejí, po případě se dotýkají, v bodě s, o čemž přesvědčí nás počet bodů úběžných křivky A. Tak na př. dvě kuželosečky ${}^1A$ ${}^2A$ procházející bodem s dávají křivku A stupně třetího, dotýkají-li se navzájem v bodě s, tu i křivka A dotkne se jich v bodě s a je rovněž stupně druhého a pod. d. Posledního výsledku možno užiti ku sestrojení oskulační kružnice křivky A sdružené k dvěma křivkám ${}^1A$, ${}^2A$. Sestrojme kuželosečky ${}^1K$ ${}^2K$ oskulující křivky ${}^1A$ ${}^2A$ v bodech ${}^1t$ ${}^2t$ a dotýkající se v bodě s. Křivka jim sdružená K bude oskulovati křivku A v bodě t. Je-li bod s v nekonečnu, jeví se obzvlášť výhodné užiti hyperbol o téže asymptotě a hledati střed křivosti hyperboly jako střed úsečky vytčené v normále kolmicemi sestrojenými k asymptotám v jejich průsečících s tečnou hyperboly.

Jsou-li křivky ${}^1A$, ${}^2A$ obě druhého stupně, pak jim sdružená $A \equiv ({}^1A, {}^2A)$ je čtvrtého stupně, osmé třídy, přináleží jí dva body dvojné, osm dvojných tečen a je rodu jedna. Zvolme k vůli jednoduchosti bod s úběžný a to v přímce S. Křivka A má dva body dvojné, které sestrojíme takto: Buďtež P, ${}^2P$ průměry sdružené v křivkách ${}^1A$, ${}^2A$ k směru S. Vyhledejme průsečíky křivek $K \equiv ({}^1A, {}^2P)$ a $L \equiv ({}^2A, {}^1P)$; jejich spojnice; a sice ony, rovnoběžné k směru S, protínají společný průměr křivek K a L, přímku $P \equiv ({}^1P, {}^2P)$ v žádaných dvojných bodech. Bodem s vedené tečny ke křivkám ${}^1A$, ${}^2A$ jsou čtyři dvojné tečny křivky A. Další čtyři tečny dvojné lze rovněž snadno najíti. Úloha bude řešena, jakmile zdaří se nám sestrojiti ke křivkám ${}^1A$, ${}^2A$ trojúhelníky ${}^1a$ ${}^1b$ c^1, ${}^2a$ ${}^2b$ ${}^2c$, kde ${}^1a$ ${}^2a$ jsou póly tětiv ${}^1b$ ${}^1c$, b^2 c^2 těchto křivek a to takové, aby byly souměrné směrem S. Osa souměrnosti je tu dvojnou tečnou, dotýkající se v bodech $b \equiv ({}^1b\ {}^2b)$, $c \equiv ({}^1c\ {}^2c)$ křivky A. Žádané trojúhelníky sestrojíme takto: Sestrojme společné harmonické poláry křivek ${}^1A$ ${}^2A$ rovnoběžné s S; buďtež to přímky H a X. Proveďme po té kolineárnou transformaci, jíž buď H neb X přejde do přímky úběžné; elací převeďme obě křivky ${}^1A$ ${}^2A$ již jednou transformované do křivek o osách rovnoběžných a to kolmých k S; načež posuňme jednu z nich až se ve dvou bodech dotkne druhé křivky. Takto stanovené body jsou přidružené k hledaným bodům ${}^1b$ ${}^1c$, ${}^2b$ ${}^2c$. Konstrukci posledně zmíněnou lze provésti na základě známé věty Pelzovy, že geom. místo ohnisek podobných a podobně položených kuželoseček, obalujících danou kuželosečku, je křivka druhého stupně a s touto konfokální.

Hledané další čtyři dvojné tečny protnou se po dvou v bodech, jež rozdělují dvojné body harmonicky.

Jsou-li dány kuželosečky ${}^1A$ a ${}^2A$ a směr S, tu zvolíme-li si libovolnou přímku ${}^+P$ a vyhledáme-li křivky ${}^1A^+ \equiv ({}^1A\ {}^+P)$, ${}^2A^+ \equiv ({}^2A\ {}^+P)$, lze vytvořiti $A \equiv ({}^1A, {}^2A)$ prostě sčítáním souřadnic směrem S pro osu ${}^+P$. Zvolíme-li ${}^+P$ v průměru křivky ${}^1A$ přidruženém k směru S, seznáme, že A je souměrna směrem S

pro osu souměrnosti křivou, totožnou s křivkou ${}^2A'$, z čehož patrno, že středy tětiv křivky A rovnoběžných se směrem S vyplňují dvě kuželosečky.

Lze provésti i šetření duální: Jsou-li dány dvě křivky ${}^1A$, ${}^2A$ a pevná přímka, vyhledati obálku paprsků oddělujících tečny křivek ${}^1A$, ${}^2A$ na S se protínající vzhledem k S harmonicky. Je-li S úběžná, pak hledané tečny probíhají středem pasu rovnoběžných tečen křivek ${}^1A$, ${}^2A$; dotyčník jest středem spojnice bodů dotyčných obou křivek základních ${}^1A$, ${}^2A$. Jsou-li ${}^1A$, ${}^2A$ kuželosečky, jest A čtvrté třídy, osmého stupně a lze ji jednoduše konstruovati, i její body dvojné a dvojné tečny.

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných.

Dr. techn. *Václav Hruška*,
soukr. docent a asistent české vysoké školy technické v Praze.

(Dokončení.)

Jest tedy

$$(39)\qquad \varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, t\sigma} = -\varepsilon_{\sigma, t\sigma; \varrho, t\varrho};\quad a_{\varrho, t\varrho, \sigma, t\sigma} = -a_{\sigma, t\sigma; \varrho, t\varrho}.$$

Při tom hoví $\varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, t\sigma}$ rovnicím (*O. N.* odst. 24., vzorec (31)).

$$(40)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{\varrho, u+1; \sigma, u'} - a_{3-u} \cdot \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, u'} = \varepsilon_{\varrho, u; \sigma, u'+1} - a_{3-u'}\, \varepsilon_{\varrho, u, \sigma, 2} \\ \varrho, \sigma = 1, 2;\ u, u' = 0, 1, 2;\ a_3 = K,\ a_2 = L,\ a_1 = M \\ \varepsilon_{\varrho, u; \sigma, -1} = 0,\ \varepsilon_{\varrho, -1; \sigma, u'} = 0 \end{cases}$$

Čili explicite psáno

$$\left.\begin{array}{rlll} & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = & K.\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2}, & \\ & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} = & L.\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} & -\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 0} \\ & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} = & M.\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} & -\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 1} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 0} - & L.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = & & -\ K\, \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 1} - & L.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} = & \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 0} & -\ L\, \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} - & L.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} = & \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 1} & -\ M\, \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 0} - & M.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = & & -\ K\, \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 1} - & M.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} = & \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} & -\ L\, \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} - & M.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} = & \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} & -\ M\, \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} \end{array}\right\}\ \varrho = 1, 2$$