Sestrojme další družinu, berouce na př. počátek a za jeden bod, tak že

$$x = 0\,;$$

tím obdržíme pro bod a' úsečku

$$x' = -\frac{2qr}{p},$$

což snadně se strojí.

Samodružné body e, f rozdělují zde obě družiny $o\,o'_\infty$, $a\,a'$ harmonicky; potřebí tedy strojiti pouze střední úměrnou mezi úsečkami oa, oa', jakož naznačuje rovnice

$$\overline{oe}^2 = \overline{of}^2 = \overline{oa}\,.\,\overline{oa'}.$$

V případě číselných součinitelů rozloží se poslední člen rovnice dané vhodně na dva činitele q, r. V obr. 11. a 12. řešena oběma spůsoby vytčenými rovnice

$$x^2 + 2{\cdot}17\,x - 3{\cdot}78 = 0,$$

kdež tedy

$$p = 2{\cdot}17,\quad qr = -3{\cdot}78\,;$$

součin qr rozvržen v činitele

$$r = 2,\quad q = -1{\cdot}89.$$

(Pro nedostatek místa připojeno k oběma dotčeným obrazcům měřidlo prosté místo transversálného.)

(Pokračování.)

O kyvadle cykloidálním a kruhovém.

(Sepsal *V. Laudi,* *) z vlaštiny volně přeložil Dr. *F. J. Studnička.*)

I. Pohybuje-li se v neodporujícím ústředí působením přítažnosti zemské hmotný bod na oblouku cykloidy DMH (obr. 19.), již zanechává co stopu bod D kružnice poloměru $OB = r$, valené na vodorovné přímce IL, dosáhne v bodu M rychlosti

$$v = \sqrt{2g\,.\,CQ}\,,$$

počíná-li pohyb v bodu H vodorovné přímky CH rychlostí $v = 0$

*) Periodico di scienze mat. e nat. I. fasc. 4. pag. 114.

Ač se tu rychlost od okamžiku k okamžiku mění, můžeme přece si představiti, že v nekonečně malé době τ, v níž hmotný bod proběhne nekonečně malý oblouk MM', jest rychlost ta stálou a že tudíž tu platí

$$MM' = v\tau \text{ neb } \tau = \frac{MM'}{\sqrt{2g.CQ}} . \qquad (1)$$

Abychom náhodné veličiny MM' a CQ odstranili, sestrojme kruh poloměru $O'D = O'C = \varrho$ a veďme v bodu M tečnu ME k cykloidě a v bodu P tečnu PA ku kruhu; spojíme-li pak D s bodem N, bude tětiva DN rovnoběžna s tečnou ME, což jest známá vlastnost cykloidy. Nazveme-li tedy úhly, jež tyto tečny uzavírají s průměrem DI, krátce a, b a povážíme-li, že délka průmětu rovná se promítnuté délce násobené s kosinusem sklonu, obdržíme

$$QQ' = MM' \cos a = PP' \cos b,$$

aneb zavedeme-li úhly α a β,

$$MM' \sin\frac{\alpha}{2} = PP' \sin\beta,$$

z čehož jde patrně

$$MM' = PP' \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}} . \qquad (2)$$

Jak z příslušného výkresu však lze poznati, jest tu

$$\sin\beta = \frac{PQ}{O'P} = \frac{\sqrt{CQ\,.\,QD}}{\varrho} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\varrho} \sqrt{2r\,.\,CQ},$$

poněvadž tu

$$DQ = DO - OQ = r\,(1 - \cos\alpha) = 2r \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

tak že vzorec (2), nahradíme-li v něm $\sin\beta$ touto hodnotou, promění se v

$$MM' = \frac{PP'}{\varrho} \sqrt{2r\,.\,CQ}$$

a tudíž vzorec (1) pomocí této hodnoty v

$$\tau = \frac{PP'}{\varrho} \sqrt{\frac{r}{g}} . \qquad (3)$$

Představíme-li si, že oblouk HMD skládá se ze samých částí podoby MM', obdržíme tedy pro součet malých dob τ, v nichž hmotný bod celý oblouk tento proběhne ze vzorce (3)

$$\Sigma \tau = T = \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{g}}\,\Sigma PP',$$

aneb poněvadž tu oblouku HMD odpovídá polokruh CPD a tudíž

$$\Sigma PP' = \pi \varrho,$$

konečně pro T co trvání polovičního kyvu cykloidálního vzorce

$$T_{1/2} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{4}$$

Poněvadž v tomto vzorci nevyskytuje se žádný úhel, žádná amplituda, nezávisí tedy T na žádném úhlu odklonění, z čehož poznáváme, že cykloida jest *tautochronou* *) neb křivkou stejnodobého pohybu kyvadlového.

II. Vedeme-li bodem D příslušný kruh oskulační k cykloidě, splyne v rozsáhlosti velmi malé s obou stran bodu D oblouk jeho s obloukem cykloidy, takže i tu bude platiti o délce trvání polovičního kyvu vzorec (4), nahradíme-li jen poloměr r poloměrem kruhu oskulačního r'; tento jest však, jak odjinud známo čtyrykrát tak velký, bude tudíž

$$r = \frac{r'}{4} \quad \text{a} \quad T_{1/2} = \pi \sqrt{\frac{r'}{4g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r'}{g}},$$

z čehož se obdrží pro délku trvání celého kyvu kruhového vzorec

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{r'}{g}}. \tag{5}$$

III. Abychom obdrželi vzorec pro kyvadlo kruhové, jehož rozkyv jest velký, představme si, že uvedeme hmotný bod ze svislé polohy OD do šikmé OB, kdež $\sphericalangle BOD = \omega$, a že je tu volně spustíme; čas, v jakém proběhne nekonečně malý kruhový oblouk NN', bude podle vzorce (1)

$$T = \frac{NN'}{\sqrt{2g.CQ}}. \tag{6}$$

---

*) Vlastnost tuto objevil nejprvé *Huyghens*, načež dokázal *J. Bernoulli*, že jest křivka tato i *brachystochronou* neb křivkou nejrychlejšího pádu. Viz *Studnička* „O počtu variačním" pag. 5. a 43.

Sestrojíme-li v bodě N tečnu NF ku kruhu BND, obdržíme podobně, jako prvé,

$$QQ' = NN' . \sin\alpha = PP' . \sin\beta$$

neb

$$NN' = PP' \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

a dosadíme-li za $\sin\beta$ hodnotu dříve ustanovenou,

$$NN' = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\varrho\sin\alpha} PP' \sqrt{2r . CQ} = \frac{PP'}{2\varrho\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2r . CQ},$$

čímž se vzorec (6) promění v

$$\tau = \frac{PP'}{2\varrho\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{r}{g}},$$

z něhož plyne pro poloviční délku kyvu

$$T_{1/2} = \frac{1}{2\varrho} \sqrt{\frac{r}{g}} \Sigma \frac{PP'}{\cos\frac{\alpha}{2}} . \qquad (7)$$

Jest-li α tak malé, že možná položiti

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 1, \text{ bude } \Sigma PP' = \pi\varrho,$$

načež ze vzorce (7) plyne

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

což se shoduje se vzorcem (5).

Není-li však α tak malé, nutno výraz

$$\Sigma \frac{PP'}{\cos {}^1/_2\,\alpha}$$

zvláště ustanoviti. A tu jest

$$DQ = r \operatorname{sinvers}\alpha = \varrho \operatorname{sinvers}\beta,$$
$$CD = 2\varrho = r \operatorname{sinvers}\omega,$$

z čehož se snadno obdrží

$$r\sin^2\frac{\alpha}{2} = \varrho\sin^2\frac{\beta}{2}, \quad \varrho = r\sin^2\frac{\omega}{2}$$

a tudíž

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\omega}{2};$$

považíme-li pak, že pomocí tohoto vzorce bude

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

obdržíme pomocí binomické poučky

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}=1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}+\frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin^4\frac{\omega}{2}+\dots.$$

$$+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\sin^{2n}\frac{\beta}{2}\sin^{2n}\frac{\omega}{2}+\dots.$$

aneb použijeme-li kratšího označení,

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\sin^{2n}\frac{\beta}{2}\sin^{2n}\frac{\omega}{2};$$

vyjádříme-li pak $\sin^{2n}\frac{\beta}{2}$ pomocí kosinusů množných β podlé známého vzorce

$$\sin^{2n}\frac{\beta}{2}=\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}+a_1\cos\beta+a_2\cos 2\beta+\dots+a_n\cos n\beta,$$

kdež koefficienty závisí jen na n, bude tedy

$$\Sigma\frac{PP'}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\omega}{2}\,\Sigma PP'$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\frac{\omega}{2}\,\Sigma PP'(b_1\cos\beta+b_2\cos 2\beta+\dots b_n\cos n\beta),$$

kdež značí b koefficienty podobné jako a.

Představuje-li součet $\Sigma PP'$ poloviční obvod kruhu $DPC=\pi\varrho$, stane se poslední člen předešlého výrazu 0, poněvadž tu β jde od 0 až do π a tudíž kosinusy v prvním a druhém kvadrantu se vyskytnou po dvou hodnoty stejné, označení však opačného, takže bude

$$\Sigma\frac{PP'}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\pi\varrho\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\omega}{2},$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (7),

$$T_{1/2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\omega}{2},$$

aneb použijeme-li tvaru rozvinutého,

$$T_{1/2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2\frac{\omega}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 sin^4\frac{\omega}{2} + \ldots\right] \quad (8)$$

z kteréhožto vzorce se opět obdrží pro ten případ, že $sin\frac{\omega}{2}$ se považuje pro velmi malé ω za 0, jednoduchý vzorec (5).

Poznámka překladatele. Jest-li ω malý úhel, možná ve vzorci (8) přestati na druhém členu a psáti místo sinusu oblouk, načež se obdrží

$$T_{1/2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1 + \frac{\omega^2}{16\,\mu^2}\right], \quad (9)$$

kdež μ značí oblouk, jehož délka se rovná poloměru příslušného kruhu neb

$$\mu = 57^{0}\,17'\,44''\,48'''\,22'''' = 206264''806247$$

a za tou příčinou se připojuje k členu poslednímu, aby se stal stejnorodým.

Jest-li na př. $\omega = 5^0$, bude

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{18000}{206264{\cdot}8\ldots} = 0{\cdot}0872\ 6646$$

a tudíž podlé vzorce (9)

$$T_{1/2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\ 1{\cdot}0004748,$$

z čehož patrno, jak se má tato doba T k době vzorcem (5) určené.