Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

O vektorových výrazech pro součtové vzorce eliptických fynkcí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 18--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123144

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1925

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O vektorových výrazech pro součtové vzorce eliptických funkcí.

Napsal *Karel Dusl.*

1. Jak známo, lze součtový vzorec pro Jacobiho eliptickou funkci $cn\,u$:

$$cn\,(u \pm v) = cn\,u\,cn\,v \mp sn\,u\,sn\,v\,dn\,(u \pm v) \qquad (1)$$

znázorniti pro reálné hodnoty argumentů u a v ve sférickém trojúhelníku tím způsobem, že dvě strany trojúhelníka učiníme rovny $am\,u$ a $am\,v$ a třetí strana vychází pak rovna $am\,(u \pm v)$, při čemž platí horní, nebo dolní znamení dle toho, je-li úhel, který obě strany $am\,u$ a $am\,v$ řečeného sférického trojúhelníka svírají tupý nebo ostrý.

Tento výsledek plyne z kosinové věty, psané pro stranu sférického trojúhelníka ABC (strany a, b, c, úhly α, β, γ). Pišme pro stranu c:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma, \qquad (2)$$

při čemž jest:

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} \qquad (3)$$

a jelikož z věty sinusové pro trojúhelník sférický následuje, že

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} = k, \qquad (4)$$

kde k znamená konstantu, charakterisující sférický trojúhelník, bude

$$\sin \gamma = k \sin c \qquad (5)$$

a z rovnice (3)

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 c}, \qquad (6)$$

při čemž horní znamení bude platiti, bude-li úhel γ úhel ostrý. Uvážíme-li ještě, že funkce $dn\,(u \pm v)$ jest pro reálné hodnoty argumentů u a v vždycky kladná, lze formální shodu rovnic (1) a (2) ihned nahlédnouti. Při tom podotýkám, že jest nutno, aby konstanta k, která vstupuje do rovnice (1) jakožto modul eliptických funkcí byla menší jedničky, voliti základní trojúhelník sférický tak, aby měl j e d e n, nebo všechy t ř i úhly tupé.*)

Klaďme:

$$am\,u = a, \quad am\,v = b, \qquad (7)$$

potom jest

$$\sin \alpha = k \sin a$$

$$\sin \beta = k \sin b. \qquad (8)$$

Volíme-li nyní úhel β ostrý, tu musí býti jeden z úhlů: α nebo

Lagrange: Théorie des fonctions § 81, 82. H. Durège: Theorie der elliptischen Functionen 1887 § 31. s. 121.

*) H. Durège: Elliptische Functionen, str. 124.

γ tupý. Je-li $a < b$ musí patrně γ být úhel tupý, volme tedy raději $a > b$, tu potom může býti;

1. α úhel ostrý, γ tupý; ve sférickém trojúhelníku $B\,C\,A$ strana $B\,A = cn\,(u+v)$ dle rovnice (1),
2. α úhel tupý, γ ostrý (pišme α_1); ve sférickém trojúhelníku $B\,C\,A_1$ bude $B\,A_1 = cn\,(u-v)$ dle téže rovnice (1).

2. V tomto pojednání míním nejprve ukázati vektoranalytický tvar rovnice (1) a odvoditi pak vektoranalyticky některé relace z nauky o funkcích eliptických.

Vezměme za základ oba sférické trojúhelníky $A\,B\,C$ a $A_1\,B\,C$ popsané v předešlém odstavci. Jednotkové vektory tvořící trojhrany příslušné oběma trojúhelníkům označme $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ resp. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; jednotkové vektory tvořící trojhrany k oběma předešlým výplňkové znamenejme $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ resp. $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$.

Používejme francouzsko-italské symboliky, pro skalární součiny znamení $\times$, pro vektorové součiny znamení $\wedge$.

Vyjděme z rovnice*) platné pro libovolné čtyři vektory:

$$(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\times(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}\times\mathfrak{C})\,(\mathfrak{B}\times\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})\,(\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}). \qquad (9)$$

Položme tu:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{c},\ \mathfrak{B} = \mathfrak{a},\ \mathfrak{C} = \mathfrak{b},\ \mathfrak{D} = \mathfrak{c}. \qquad (10)$$

Tak obdržíme:

$$(\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a})\times(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}), \qquad (11)$$

což vzhledem k tomu, že

$$\mathfrak{c}\times\mathfrak{c} = 1$$

dává rovnici:

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) - (\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c})\times(\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a}), \qquad (\mathrm{I})$$

od kteréžto rovnice dále vycházejme. Ve shodě s předešlým odstavcem lze patrně klásti:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}\times\mathfrak{c} &= cn\,u\\ \mathfrak{c}\times\mathfrak{a} &= cn\,v\\ \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} &= cn\,(u+v).\end{aligned} \qquad (12)$$

Potom ovšem budou vektorové součiny:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c} &= sn\,u\,.\,\mathfrak{a}',\\ \mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a} &= sn\,v\ \mathfrak{b}'\\ \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b} &= sn\,(u+v)\,\mathfrak{c}'\end{aligned} \qquad (13)$$

a jelikož dle (4) odstavce 1. jest:

$$k^2 = \frac{(\mathfrak{b}'\wedge\mathfrak{c}')^2}{(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c})^2} = \frac{(\mathfrak{c}'\wedge\mathfrak{a}')^2}{(\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a})^2} = \frac{(\mathfrak{a}'\wedge\mathfrak{b}')^2}{(\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})^2}, \qquad (14)$$

bude na příklad:

$$dn^2\,u = 1 - k^2\,sn^2\,u = 1 - \frac{(\mathfrak{b}'\wedge\mathfrak{c}')^2}{(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c})^2}(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c})^2 = (\mathfrak{b}'\times\mathfrak{c}')^2, \qquad (15)$$

---

*) Gibbs-Wilson: „Vectoranalysis." 76 str. (3d ed.) Dusl: „Základy vektorového počtu" str. 28.

tedy:
$$
\begin{aligned}
dn\,u &= \pm(\mathfrak{b}'\times\mathfrak{c}')\\
dn\,v &= \pm(\mathfrak{c}'\times\mathfrak{a}')\\
dn\,(u+v) &= \pm(\mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}'),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

při čemž znamení nutno tak voliti, aby funkce $dn\,u$, $dn\,v$, $dn\,(u\pm v)$ měly hodnoty vesměs kladné. Bude tedy v prvním z obou uvažovaných trojhranů ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$)
$$
\begin{aligned}
dn\,u &= -(\mathfrak{b}'\times\mathfrak{c}')\\
dn\,v &= -(\mathfrak{c}'\times\mathfrak{a}')\\
dn\,(u+v) &= \mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}'.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Naproti tomu v trojhranu ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) a k němu výplňkovém bude:
$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}\times\mathfrak{c} &= cn\,u\\
\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}_1 &= cn\,v\\
\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{b} &= cn\,(u+v)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

a tudíž
$$
\begin{aligned}
dn\,u &= -(\mathfrak{b}'\times\mathfrak{c}')\\
dn\,v &= \mathfrak{c}'\times\mathfrak{a}'_1\\
dn\,(u-v) &= -(\mathfrak{a}'_1\times\mathfrak{b}').
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Protože pak v rovnici (I) vzhledem k (13) jest:
$$
(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c})\times(\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a}) = sn\,u\;sn\,v\;(\mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}'),
\tag{20}
$$
jeví se po dosazení skalárního součinu $\mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}'$ z rovnic (17), eventuelně (19) a ostatních součinů skalárních z rovnic (12) event. (18) **úplná shoda rovnice (I) se součtovými vzorci (1) pro eliptickou funkci** $cn\,(u\pm v)$ na počátku pojednání uvedenými.

3. Z rovnice (17) plyne pro **výplňkový trojhran** $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$
$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}'\times\mathfrak{c}' &= -\,dn\,u\\
\mathfrak{c}'\times\mathfrak{a}' &= -\,dn\,v\\
\mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}' &= dn\,(u+v).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Modul trojhranu výplňkového jest dle (14) odst. 2.
$$
k'^2 = \frac{(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c})^2}{(\mathfrak{b}'\wedge\mathfrak{c}')^2} = \frac{(\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a})^2}{(\mathfrak{c}'\wedge\mathfrak{a}')^2} = \frac{(\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})^2}{(\mathfrak{a}'\wedge\mathfrak{b}')^2} = \frac{1}{k^2}.
\tag{22}
$$

Vedle toho následuje z rovnice (21) pro vektorové součiny v trojhranu výplňkovém:
$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}'\wedge\mathfrak{c}' &= \sqrt{1-dn^2 u}\;\mathfrak{a} = k\;sn\,u\;\mathfrak{a}\\
\mathfrak{c}'\wedge\mathfrak{a}' &= \sqrt{1-dn^2 v}\;\mathfrak{b} = k\;sn\,v\;\mathfrak{b}\\
\mathfrak{a}'\wedge\mathfrak{b}' &= k\;sn\,(u+v)\;\mathfrak{c}
\end{aligned}
\tag{23}
$$
a analogicky k rovnici (20) předešlého odstavce
$$
(\mathfrak{b}'\wedge\mathfrak{c}')\times(\mathfrak{c}'\wedge\mathfrak{a}') = k^2\;sn\,u\;sn\,v\;(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}),
\tag{24}
$$
při čemž dle (12) jest:
$$
\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = cn\,(u+v)
\tag{25}
$$

Píšeme-li tedy větu (I) pro trojhran utvořený jednotkovými vektory $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nalezneme ihned po dosazení z předešlých rovnic:

$$dn\,(u+v) = dn\,u\; dn\,v - k^2\, sn\,u\; sn\,v\; cn\,(u+v), \tag{26}$$

klademe-li sem:

$$cn\,(u+v) = \frac{cn\,u\; cn\,v - sn\,u\; sn\,v\; dn\,u\; dn\,v}{1 - k^2\, sn^2 u\; sn^2 v}, \tag{27}$$

obdržíme správně:

$$dn\,(u+v) = \frac{dn\,u\; dn\,v - k^2\, sn\,u\; sn\,v\; cn\,u\; cn\,v}{1 - k^2\, sn^2 u\; sn^2 v}. \tag{28}$$

Analogickou cestou bych z rovnic (19) a (18) předešlého odstavce získal použitím věty (I) na výplňkový trojhran $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ správný vzorec pro $dv\,(u-v)$.

4. Analogickou formulí mohli bychom vyjádřiti též funkci $sn\,(u \pm v)$. Stanovíme-li sférický trojúhelník, jehož strany by byly:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 90 \mp am\,u \\ \bar{b} &= 90 \mp am\,v \\ \bar{c} &= 90 \mp am\,(u \pm v), \end{aligned} \tag{29}$$

bude na př. pro horní znamení jistě v platnosti věta:

$$sn\,(u+v) = sn\,u\; sn\,v + cn\,u\; cn\,v\; \cos\bar{\gamma} \tag{30}$$

kde:

$$\begin{aligned} \cos\bar{\gamma} &= \sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 (90 - am\,(u+v))} \\ &= \sqrt{1 - \bar{k}^2\, cn^2\,(u+v)}, \end{aligned} \tag{31}$$

při čemž modul $\bar{k}$ příslušného trojúhelníku sférického lze sice počítati, použijeme-li vzorce l'Huilierova ve tvaru:

$$\bar{k} = \frac{\sin\bar{\alpha}}{\sin\bar{a}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{\cos\,(45 - s)\sin\,(45 - s + a)\sin\,(45 - s + b)\sin\,(45 - s + c)}{\cos a \cos b \cos c}}, \tag{32}$$

kde a, b, c znamenají strany původního sférického trojúhelníka ABC a s poloviční jejich součet, tento modul $\bar{k}$ nelze však racionálně vyjádřiti původním modulem eliptických funcí k, jenž vyplývá z původního sférického trojúhelníku (rovnice (4) odst. 1.).

5. Vraťme se k původnímu sférickému trojúhelníku ABC a trojhranu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Dle (12) odst. 2. bylo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} &= cn\,u \\ \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} &= cn\,v \\ \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &= cn\,(u+v). \end{aligned} \tag{33}$$

Ponecháme-li úhel u B konstantní ($=\beta$) a vytkneme-li v obou meridiánových rovinách tvořících úhel β vektory jednotkové $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{a}_3$ ... atd., jichž koncové body budou na prodloužených meridiánech BA, BC tak aby:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\times\mathfrak{c}_1 &= \\ =\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1\times\mathfrak{c}_2 &= \\ =\mathfrak{c}_2\times\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2\times\mathfrak{c}_3 &= \ldots \\ &= cn\, v, \end{aligned} \tag{34}$$

tu bude pořadem:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\times\mathfrak{a} &= cn\,(u+v\ ) \\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{c}_1 &= cn\,(u+2v) \\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}_1 &= cn\,(u+3v) \\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{c}_2 &= cn\,(u+4v) \ \text{atd.} \end{aligned} \tag{35}$$

To je zevšeobecnění výsledku uvedeného v rovnicích (12) odst. 2. Analogický výsledek pro vektory komplementární obdrželi bychom z rovnic (17) odst. 2., čímž bychom získali znázornění hodnot $dn\,(u+kv)$. Kladouce v předešlé $v=u$ nalézáme znázornění řady hodnot:

$$cn\,u,\ cn\,2u,\ cn\,3u,\ldots$$
$$dn\,u,\ dn\,2u,\ dn\,3u,\ldots$$

6. V následujícím chci odvoditi souměrný vzorec z nauky o funkcích eliptických cestou vektoranalytickou a ukázati tak možnost získání nových vztahů tímto způsobem. — Vraťme se nejprve za tím účelem ke vzpomenutému již trojhranu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ a ke vztahům 12. odst. 2. — Znamenejme t. zv. „skalární součin tří vektorů"*) označením $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ a vyjděme z rovnice:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]^2 = \begin{vmatrix} 1, & \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, & \mathfrak{c}\times\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, & 1, & \mathfrak{b}\times\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}\times\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\times\mathfrak{c}, & 1 \end{vmatrix}{}^{**)}. \tag{36}$$

Položme:

$$u+v=w. \tag{37}$$

I bude vzhledem k rovnicím (12) odst. 2.:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]^2 = \begin{vmatrix} 1 & cn\,w & cn\,v \\ cn\,w & 1 & cn\,u \\ cn\,v & cn\,u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\,cn\,u\ cn\,v\ cn\,w - cn^2 u - cn^2 v - cn^2 w \tag{38}$$

Se zřetelem pak k rovnicím (17) odst. 2. jest pro soustavu vektorů trojhranu výplňkového:

$$[\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}']^2 = \begin{vmatrix} 1, & dn\,w, & -dn\,v \\ dn\,w, & 1, & -dn\,u \\ -dn\,v, & -dn\,u, & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\,dn\,u\ dn\,v\ dn\,w - dn^2 u - dn^2 v - dn^2 w \tag{39}$$

Nazveme-li hodnotu pseudoskaláru $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ zkrátka písmenou D a soustavu vektorů reciprokých***) k soustavě $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ označíme písmeny $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{c}}$ bude se zřetelem k (13) odst. 2.

*) Gibbs-Wilson: „Vectoranalysis" 68. Dusl: „Základy vektorového počtu" 22.

**) Gibbs-Wilson: „Vectoranalysis" 87. Dusl: „Základy vektorového počtu" 31.

***) Gibbs-Wilson 82, Dusl: „Základy vektorového počtu" 24.

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}}{D} = \frac{sn\,u}{D}\,\mathfrak{a}'$$
$$\bar{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c} \wedge \mathfrak{a}}{D} = \frac{sn\,v}{D}\,\mathfrak{b}' \qquad (40)$$
$$\bar{\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}}{D} = \frac{sn\,w}{D}\,\mathfrak{c}',$$

a tudíž

$$[\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{c}}] = \frac{sn\,u\;sn\,v\;sn\,w}{D^3}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'] \qquad (41)$$

a jelikož jest obecně:

$$[\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{c}}] = \frac{1}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]} = \frac{1}{D}\,^{*)} \qquad (42)$$

bude z rovnice (41)

$$D^2 = sn\,u\;sn\,v\;sn\,w\;[\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}']. \qquad (43)$$

Vzhledem pak k (38) a (39) nalézáme vztah:

$$\sqrt{1 + 2\;dn\,u\;dn\,v\;dn\,w - dn^2 u - dn^2 v - dn^2 w} =$$
$$= \frac{1 + 2\;cn\,u\;cn\,v\;cn\,w - cn^2 u - cn^2 v - cn^2 w}{sn\,u\;sn\,v\;sn\,w}. \qquad (\mathrm{II})$$

7. Differencování vektorových výrazů pro funkce eliptické.

Z rovnic (12), (13) a (17) odst. 2. vyplývá, že možno označiti:

$$\begin{aligned} cn\,u &= \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} \\ sn\,u\;\;\mathfrak{a}' &= \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c} \\ -\,dn\,u &= \mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}'. \end{aligned} \qquad (44)$$

Při differencování těchto rovnic podržme rovinu obou vektorů $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ za pevnou (tedy též vektor $\mathfrak{a}'$), rovněž tak rovinu obou vektorů $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$. Předpoklad tento neomezuje nikterak všeobecnost.

Differenciál jednotkového vektoru (na př. $\mathfrak{b}$) jest vektor, jehož velikost rovná se velikosti úhlu pootočení vektoru (v míře obloukové) a jehož směr (tedy jednotkový vektor v onom směru) jest kolmo ke směru vektoru původního. — Bude tudíž

$$\begin{aligned} d\mathfrak{b} &= \mathfrak{b}_1\;d_1 a \\ d\mathfrak{c} &= \mathfrak{c}_1\;d_2 a, \end{aligned} \qquad (45)$$

kde $\mathfrak{b}_1$ a $\mathfrak{c}_1$ jsou jednotkové vektory kolmé k vektorům $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ a $d_1 a$ a $d_2 a$ jsou příslušné úhly, o které se vektory b a $\mathfrak{c}$ pootočily.

Z první rovnice (44) následuje pak bezprostředně:

$$d\,cn\,u = d\,(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{b} \times d\mathfrak{c} + d\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}_1\;d_1 a + \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{c}\;d_2 a \quad (46)$$

*) Gibbs-Wilson 86, Dusl: „Základy“ 27. —

a klademe-li

$$da = d\,am\,u = d_1 a + d_2 a, \tag{47}$$

jak bylo zavedeno při začátku prvního odstavce, tu bude

$$d\,cn\,u = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}_1)\,(d_1 a + d_2 a), \tag{48}$$

při čemž

$$\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{c} = -\,sn\,u \tag{49}$$

dle rovnic (12) odst. 2. Tedy na konec správně:

$$d\,cn\,u = -\,sn\,u\ \ d\,am\,u = -\,sn\,u\ \ dn\,u\ \ du. \tag{III}$$

Obdobně z druhé z rovnic (44) následuje:

$$d\ sn\,u\ \mathfrak{a}' = d\ (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) = d\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \wedge d\mathfrak{c} \tag{50}$$

a vzhledem k rovnicím (45):

$$d\ sn\,u\ \mathfrak{a}' = \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{c}\ \ d_1 a + \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}_1\ \ d_2 a, \tag{51}$$

za předpokladu (47) jest pak:

$$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{c} = \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}_1 = cn\,u\ \ \mathfrak{a}', \tag{52}$$

takže na konec z rovnice (51) opět správně

$$d\ sn\,u = cn\,u\ \ d\ am\,u = cn\,u\ \ dn\,u\ \ du. \tag{IV}$$

Konečně i poslední vzorec

$$d\ dn\,u = -\,k^2\ sn\,u\ \ cn\,u\ \ du \tag{V}$$

lze odvoditi z tvaru vektorového, píšeme-li z třetí rovnice (44):

$$\begin{aligned} d\ dn\,u &= -\ d\ (\mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}') \\ &= -\ d\ \mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}' - \mathfrak{b}' \times d\ \mathfrak{c}'. \end{aligned} \tag{53}$$

Položíme-li:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{b}' &= \mathfrak{b}'_1\ \ d'\,a' \\ d\mathfrak{c}' &= \mathfrak{c}'_1\ \ d''a', \end{aligned} \tag{54}$$

kde veličiny v pravo mají analogický význam jako v rovnicích (45), při čemž jest opět $da' = d'a' + d''a'$,

takže na konec z rovnice (53)

$$d\ dn\,u = -\,(\mathfrak{b}'_1 \times \mathfrak{c}')\ \ (d'a' + d''a'), \tag{55}$$

při čemž

$$\mathfrak{b}'_1 \times \mathfrak{c}' = \mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}'_1 = \sin\,a' \tag{56}$$

kde

$$\cos\,a' = -\,dn\,u$$

dle první z rovnic (17) odst. 2., takže jest

$$\mathfrak{b}'_1 \times \mathfrak{c}' = k\ \ sn\,u. \tag{57}$$

Jelikož pak jest $a' = -\,arc\,\cos\,dn\,u,$

z čehož differencováním

$$da' = -\frac{d\,dn\,u}{\sqrt{1-dn^2 u}}, \tag{58}$$

tu dosadíme-li z (57) a (58) do rovnice (55) dostáváme identitu.

8. Zajisté ještě jiné vztahy z nauky o funkcích eliptických lze jednoduše vyjádřiti vzorci analyse vektorové, zejména obrátíme-li zřetel k funkcím théta. Než účel tohoto pojednání jest, míním, dosažen: 1. Odvoditi součtové formule funkcí eliptických cestou vektoranalytickou. 2. Ukázati, že vektorová analysa může posloužiti při odvození některých nových relací z nauky o funkcích eliptických, pokud ovšem vyplývají z jejich vzájemné souvislosti. Při tom netřeba se omeziti na funkce Jacobiho a možno vektorovým způsobem hlouběji vniknouti v nauku o funkcích eliptických, předpokládáme-li, že jednotkové původně vektory $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ lze differencovati i co do jich velikosti i co do směru.

*

Sur les formules d'addition des fonctions elliptiques déduites par les méthodes d'analyse vectorielle.

(Extrait de l'article précédent.)

D'après une remarque de Lagrange („Théorie des fonctions" § 81, 82) la formule

$$cn\,(u \pm v) = cn\,u\; cn\,v \mp sn\,u\; sn\,v\; dn\,(u \pm v) \tag{1}$$

exprime (pour les valeurs réelles des deux arguments) la relation entre les trois côtés d'un triangle sphérique, dont deux sont égaux à *am u* et *am v* et dont le troisième est égal à *a m* $(u \pm v)$, le signe supérieur (inférieur) correspondant au cas où l'angle opposé est obtus (aigu). Désignons par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ les trois vecteurs unitaires qui constituent le triangle portant le triangle sphérique considéré, par $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ ceux du triangle complémentaire. Posons (dans la notation franco-italienne)

$$\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = cn\,u, \quad \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} = cn\,v, \quad \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = cn\,(u+v). \tag{2}$$

On a, alors:

$$\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c} = sn\,u\,\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{a} = sn\,v\,\mathfrak{b}', \quad \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} = sn\,(u+v)\,\mathfrak{c}' \tag{3}$$

d'où l'on conclut que

$$\mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}' = -dn\,u, \quad \mathfrak{c}' \times \mathfrak{a}' = -dn\,v, \quad \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}' = dn\,(u+v). \tag{4}$$

Si l'on fait usage de la formule:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) - (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) \times (\mathfrak{c} \wedge \mathfrak{a}) \tag{I}$$

en y substituant

$$(\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) \times (\mathfrak{c} \wedge \mathfrak{a}) = sn\,u\,sn\,v\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}'), \tag{5}$$

on voit que cette formule est précisément la formule d'addition de la fonction $cn\,(u \pm v)$, exprimée dans la notation vectorielle. Le triangle complémentaire nous fournit, de la même manière, la formule d'addition de la fonction dn, et le triangle aux côtés $90 \mp am\,u$ etc. celle de sn.

Une autre application est la suivante: En partant de la formule

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]^2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} & 1 & \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} \\ \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

calculons les pseudoscalaires

$$\begin{aligned} [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]^2 &= 1 + 2\,cn\,u\,cn\,v\,cn\,w - cn^2 u - cn^2 v - cn^2 w \\ [\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}']^2 &= 1 + 2\,dn\,u\,dn\,v\,dn\,w - dn^2 u - dn^2 v - dn^2 w \end{aligned} \tag{7}$$

$$\text{où } u + v = w$$

au moyen des formules (2) et (4); si l'on introduit les vecteurs réciproques au système $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$:

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{sn\,u}{D}\mathfrak{a}', \quad \bar{\mathfrak{b}} = \frac{sn\,v}{D}\mathfrak{b}', \quad \bar{\mathfrak{c}} = \frac{sn\,w}{D}\mathfrak{c}' \tag{8}$$

où

$$D = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}],$$

on déduit de la formule:

$$[\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{c}}] = \frac{1}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]}$$

la formule intéressante que voici:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 + 2\,dn\,u\,dn\,v\,dn\,w - dn^2 u - dn^2 v - dn^2 w} = \\ &= \frac{1 + cn\,u\,cn\,v\,cn\,w - cn^2 u - cn^2 v - cn^2 w}{sn\,u\,sn\,v\,sn\,w} \end{aligned} \tag{II}$$

dans le second membre de laquelle figure une fonction monogène.