Miloslav Pelíšek

O složeném pseudohelikoidu

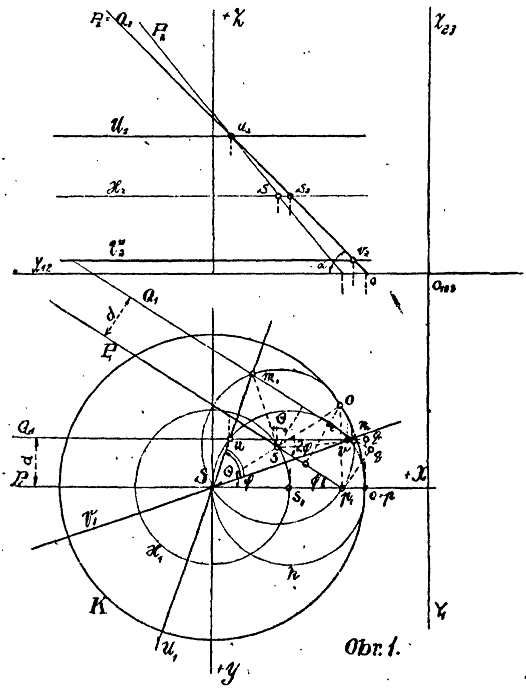
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 43--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123132

O složeném pseudohelikoidu.

Napsal *Miloslav Pelíšek.*

Budiž (obr. 1.) K kružnice o středu S a o poloměru $R = 2r$, po jejímž vnitřním obvodě se kotálí kružnice k o středu s a poloměru r; budiž dále $o = p$ počáteční poloha okamžitého pólu, a Ss průměr P_1 kružnice k, jež prochází tímto pólem o; budiž dále Q_1



Obr. 1.

přímka rovnoběžná ku P_1, a budiž d vzdálenost těchto rovnoběžek. V bodě $o = p$ veďme tečnu ke k, jež protíná Q_1 v bodě q; bodem q veďme přímku Q, jejíž pravoúhlý průmět do roviny K jest Q_1, a jež svírá s touto rovinou konstantní úhel α — k vůli jednoduchosti vývinů nechť $\alpha = 45^0$. Při kotálení kružnice k po vnitřním obvodě kružnice K vytvoří přímka Q, pevně s touto kružnicí spojená, sborcenou plochu, jejíž vlastnosti chceme vyšetřiti:

Zvolme S jako počátek souřadnic, $So = +X$, kolmici k ní za $+Y$ a kolmici k oběma za $+Z$ nad rovinou K; při kotálení opíše bod $p=o$ průměr Ss, a střed s opíše ku K soustřednou kružnici x o poloměru r. Po odkotálení oblouku φ kružnice K, a tedy oblouku 2φ kružnice k, přijdou uvedené body a přímky do nových poloh ϱ, s, $P_1=p_1s$, p_1q a Q_1; pak shledáme snadno jako rovnice přímky Q:

Půdorys: $x \sin\varphi + y\cos\varphi = d + r\sin\varphi\cos\varphi.$
Nárys: $x + (z - 2r)\cos\varphi = d\sin\varphi.$
Bokorys: $y - z\sin\varphi = d\cos\varphi.$

Eliminací úhlu φ z posledních dvou rovnic obdržíme rovnici sborcené plochy, kterou při uvažovaném kotálení vytvoří přímka Q:

$$(2ry - yz - dx)^2 + (xz - dy)^2 = (2rz - z^2 - d^2)^2,$$

jež pro $d=O$ přejde v rovnici plochy, kterouž jsme v dřívějším pojednání nazvali složený helikoid, totiž:

$$\frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{(2r-z)^2} = 1.$$

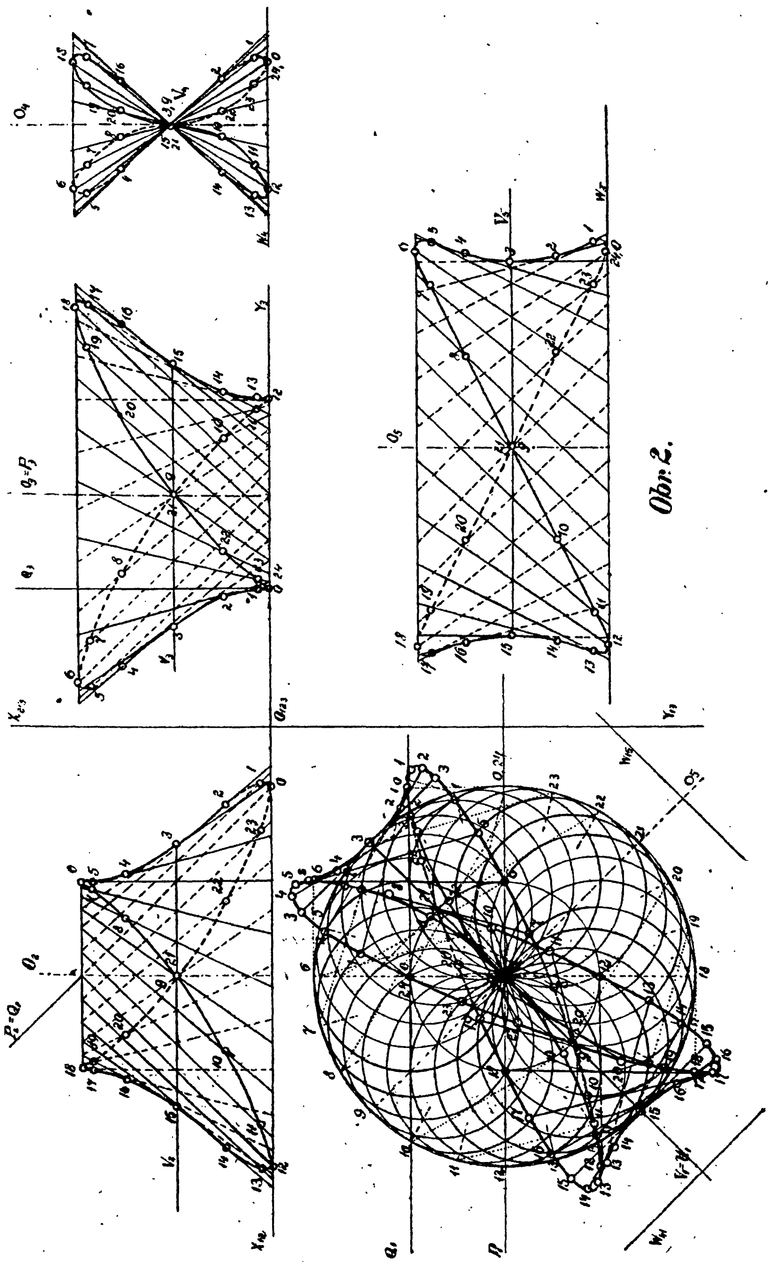
Také při této ploše opíše každý bod přímky Q elipsu, jejíž střed je na ose Z. Je-li $d<r$, protíná přímka Q_1 kružnici k v reálných bodech m_1 a n_1, a tyto body neopíší při kotálení elipsy, nýbrž přímky U_1 a V_1, jež počítají dvojnásobně (jakožto elipsy, jejichž malé osy se rovnají nule). Plocha má tedy dvě reálné dvojné přímky, jež jsou k rovině K rovnoběžné a jež spolu svírají úhel Θ, jenž jest určen rovnicí $tg\,\Theta = \frac{\sqrt{r^2-d^2}}{d}$. Tato plocha povstane tedy též, pohybuje-li se konstantní úsečka přímky Q tak, aby její krajní body opisovaly dané mimoběžky U a V, jež jsou rovnoběžné k rovině kružnice K a svírají spolu kosý úhel Θ.

Je-li $d>r$, pak jsou tyto dvojné přímky pomyslné. Zajímavý jest mezný případ, totiž $d=r$. Pak přejde rovnice plochy v následující:

$$(2ry - yz - rx)^2 + (xz - ry)^2 = (z-r)^4.$$

V tomto případě se obě dvojné přímky U_1 a V_1 stanou nekonečně blízkými (jinými slovy: splývajícími). Přímka Q se tedy pohybuje tak, aby krajní body nekonečně malé úsečky na této přímce opisovaly dvě nekonečně blízké mimoběžky U a V, jež jsou rovnoběžné k rovině K; tento pohyb je zdánlivě neurčitý, avšak kotálení je úplně určité, poněvadž přímka Q_1 přejde v tomto případě v tečnu příslušné kružnice k.

V obrazci 2. jest sestrojen půdorys, nárys a bokorys této mezné plochy, jakož i průmět na stranorysnu, jež jest rovnoběžná ke splývajícím přímkám $U_1 = V_1$ a konečně průmět na stranorysnu, jež je k dřívější kolmá.



Obr. 2.

S t r i k č n í k ř i v k a p l o c h y. Jelikož tvořící přímka Q svírá s půdorysnou konstantní úhel $\alpha = 45^0$, jest direkční kužel plochy pravoúhlý rotační kužel; z toho následuje, jak bylo v pojednání o složeném helikoidu uvedeno, že je zdánlivý obrys v půdorysně, — t. j. kosoúhlá astroida — současně půdorysem strikční křivky plochy. Jednotlivé body půdorysu této křivky obdržíme, spustíme-li z okamžitého pólu kolmici ku příslušné poloze přímky Q_1; pata e_1 této kolmice jest bod hledaného obrysu v půdorysně; jeho nárys a bokorys obdržíme příslušným promítáním.

Šikmá astroida v půdorysně je určena parametricky rovnicemi:

$$x = 2r\cos\varphi - (r\sin 2\varphi - d)\sin\varphi,$$
$$y = 2r\sin\varphi - (r\sin 2\varphi - d)\cos\varphi, z = r(1 - \cos 2\varphi).$$

Z toho obdržíme pro nárys strikční křivky eliminací úhlu φ z rovnice pro x a z rovnici:

$$[2rx^2 - (2r - z)^3 - dz^2]^2 = 4d^2(2r - z)^3 z.$$

Nárys strikční křivky jest tedy křivka šestého řádu, jejíž rovnice přejde pro $d = 0$, skutečně v dřívější rovnici $(2r - z)^3 = 2rx^2$. Rovněž tak jest bokorys strikční křivky určen rovnicí:

$$[2ry^2 - z^3 - d^2(2r - z)]^2 = 4d^2z^3(2r - z),$$

kterážto rovnice přejde pro $d = 0$ v dřívější rovnici $z^3 = 2ry^2$.

S k l o n s t r i k č n í k ř i v k y. Z výše uvedeného parametrického vyjádření strikční křivky plyne:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -2r\sin\varphi - 2r\cos 2\varphi\sin\varphi - (r\sin 2\varphi - d)\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2r\cos\varphi - 2r\cos 2\varphi\cos\varphi + (r\sin 2\varphi - d)\sin\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = 2r\sin 2\varphi.$$

Z toho následuje po několika redukcích:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 9r^2\sin^2 2\varphi - d(6r\sin 2\varphi - d).$$

Označíme-li β úhel, který svírá tangenta v libovolném bodě strikční křivky s půdorysnou, jest dle rovnice uvedené v dřívějším pojednání:

$$tg^2\beta = \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{4r^2\sin^2 2\varphi}{9r^2\sin^2 2\varphi - d(6r\sin 2\varphi - d)};\ \text{tudíž}$$

$$tg\,\beta = \pm \frac{2r \sin 2\varphi}{\sqrt{9r^2 \sin^2 2\varphi - d(6r \sin 2\varphi - d)}},$$

kterážto rovnice přejde skutečně pro $d = 0$ v dřívější rovnici $tg\beta = \pm \frac{2}{3}$, pro mezný případ $d = r$ přejde tato rovnice v jednodušší tvar:

$$tg\,\beta = \pm \frac{2}{3 - \frac{1}{\sin 2\varphi}}.$$

Na přímém válci, jehož základna jest kosoúhlá astroida, se nalézá strikční křivka naší plochy, jež však není pro $d \gtrless 0$ šroubovicí na této jádrové ploše, poněvadž úhel sklonu jednotlivých tečen této křivky není více konstantní, nýbrž je funkcí úhlu kotálení φ; jedině pro $d = 0$ obdržíme $tg\beta = \pm \frac{2}{3}$, a naše strikční křivka přijde v obecnou šroubovici a naše sborcená plocha přejde ve složený helikoid uvažovaný v předešlém pojednání.

Pro takové prostorové křivky, jež sice nejsou obecnými šroubovicemi, ale mohou pro specielní hodnoty přejíti v obecnou šroubovici, navrhuji jméno **nevlastní křivky šroubové** aneb **pseudoheliky**; rovněž tak navrhuji pro takové sborcené plochy, jež sice nejsou obecnými šroubovými zborcenými plochami, ale mohou pro specielní hodnoty přejíti v obecnou šroubovou plochu, jméno **nevlastní plochy šroubové** aneb též **pseudohelikoidy**; pak možno vysloviti větu:

Strikční křivka naší plochy jest nevlastní šroubová křivka a naše plocha jest složený pseudohelikoid, složený ze čtyř nevlastních šroubových ploch, z nichž dvě a dvě jsou střídavě shodné; jednotlivé plochy se ve společné povrchové přímce dotýkají.

Přihlédněme nyní ještě k tomu, zdali jsou možné ještě jiné polohy tvořící přímky než ony, jež byly v tomto a dřívějším pojednání uvažovány a jejichž pohybem by snad mohly povstati ještě obecnější tvary uvažované plochy. Uvažujme pohyb, že přímý válec, jehož základna je kružnice k o poloměru r, se kotálí po vnitřní ploše přímého válce, jehož základna je kružnice K o poloměru $R = 2r$. Tvořící přímka P, jež leží v průměrové rovině válce k, nechť protíná okamžitou pólovou přímku O obou válců v bodě O; vedeme-li tímto bodem půdorysnu kolmou ku O, jest patrno, že přímka P vytvoří složený helikoid, jenž byl vyšetřován v předešlém pojednání. Vedeme-li novou půdorysnu, jež má od předešlé vzdálenost $\pm v$, protne přímka P tuto půdorysnu v nějakém bodě p, vně neb uvnitř příslušné kružnice k'; přímka P však vytvoří tutéž plochu jako dříve; jest tedy patrno:

1. Všechny přímky P, jež leží v průměrné rovině válce k a jsou mezi sebou rovnoběžné (svírají s osou válce úhel $\alpha = 45^0$), vytvoří shodné složené helikoidy, jež se mohou stotožniti, pošineme-li je ve směru osy O o úsečku $\pm \nu$; povrchové přímky těchto ploch tvoří kongruenci paprsků.

2. Tvořící přímky P, jež leží v průměrové rovině válce k a mají konstantní sklon $\alpha = 45^0$ k základně válce, avšak neprotínají počáteční polohu okamžité pólové přímky O, vytvoří zase plochy shodné s dřívějšími helikoidy; odkotálí-li se tato plocha o určitý úhel φ, ztotožní se s dřívějším helikoidem, poněvadž při kotálení přímky P přejde tato přímka jednou do polohy, v níž protíná příslušnou okamžitou pólovou přímku O; všechny přímky P, jež protínají osu hybného válce v témže bodě a svírají se základnou konstantní úhel $\alpha = 45^0$, vytvoří zase při kotálení kongruenci paprsků, kdežto všechny takové přímky, jež vůbec protínají osu hybného válce, vytvoří komplex paprsků.

3. Všechny přímky Q, jež leží v rovině rovnoběžné ku průměrové rovině válce k (které přísluší konstantní vzdálenost d) a svírají s osou hybného válce konstantní úhel $\alpha = 45^0$, vytvoří plochy shodné s plochou vyšetřovanou v tomto pojednání; tyto plochy se mohou ztotožniti pošinováním ve směru osy hybného válce. Povrchové přímky těchto ploch tvoří paprskovou kongruenci pro konstantní d a paprskový komplex pro proměnlivé d.

Z toho je patrno, že libovolná přímka R, jež jest s rovinou hybné kružnice k pevně spojena, nemůže vytvořiti žádnou jinou plochu, než kterou vytvořila buď přímka P nebo přímka Q.

Též jest patrna následující věta:

Všechny přímky daného směru, jež jsou pevně spojeny s rovinou hybné kružnice k, vytvoří při kotálení této kružnice paprskový komplex. Tento komplex jest druhého řádu, poněvadž všechny paprsky, jež procházejí libovolným bodem prostoru a náleží tomuto komplexu, naplňují rotační kužel (jenž je pro $\alpha = 45^0$ orthogonálným). Tento paprskový komplex je též druhé třídy, poněvadž komplexní paprsky tvoří v libovolné rovině dvě soustavy rovnoběžných přímek; směry těchto přímek obdržíme, protneme-li řídící kužel rovinou, jež prochází jeho vrcholem a jest rovnoběžná k dané rovině. Komplexní paprsky obalují tedy v libovolné rovině kuželosečku, jež se rozpadá ve dva body v nekonečnu, které mohou býti buď reálné nebo pomyslné. Máme tedy výsledek:

Jako pohybem šroubovým může být vytvořen lineární komplex paprsků, rovněž tak může eliptickým hypocykloidálním pohybem býti vytvořen zvláštní kvadratický paprskový komplex, jenž by se mohl též jmenovati eliptickým.

Vyšetřme ještě geometrické místo centrálních bodů e, mění-li d svou hodnotu. Z obr. 1. jest patrno, že centrální body e, jež přísluší určité hodnotě odkotáleného úhlu φ, leží na přímce oe, rovnoběžné k půdorysně, jejíž půdorys je kolmý ku příslušnému půdorysu přímky Q a jejíž výška nad půdorysnou je eq. Tato přímka prochází bodem o, jenž má souřadnice $2r\cos\varphi$, $2r\sin\varphi$, a má směrnici $+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$; její rovnice je tedy:

$$y - 2r\sin\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(x - 2r\cos\varphi)$$

aneb
$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = 2r\cos 2\varphi.$$

Její výška je $z = r - r\cos 2\varphi = 2r\sin^2\varphi$.

Eliminujeme-li z těchto dvou rovnic φ, obdržíme jako geometrické místo všech těchto přímek plochu, jejíž rovnice jest:

$$[x^2(2r - z) + y^2 z - 8r(r - z)^2]^2 = 2x^2y^2z(2r - z).$$

Všechny centrální body naplňují tedy sborcenou centrální plochu šestého řádu.

Na konci budiž podotčeno, že autor dospěl též k analogickým výsledkům nejen pro kotálení na vnitřním obvodě, nýbrž též pro kotálení na vnějším obvodě a sice pro hodnoty R jest rovno r, $2r$, $3r$...

*

Sur un pseudohélicoïde composé.

(Extrait de l'article précédent.)

Quand un cylindre droit, dont la base est le cercle k au rayon r, roule intérieurement sur le cylindre coaxial dont la base est le cercle K au rayon $R = 2r$, et si une droite quelconque Q est fixée au cylindre mobile, cette droite engendre, pendant le roulement, une surface gauche du quatrième dégré. Si la position initiale de Q est dans un plan parallèle au plan diamétral qui passe par la position initiale de l'axe instantané O, d étant la distance de ces deux plans parallèles, et si Q a l'inclinaison $\alpha = 45^0$ à la base du cylindre, alors, pour le système de coordonnées que l'on remarque dans la figure 1, les équations des projections de la droite Q sont, φ étant l'angle déroulé:

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = d + r\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$x + (z - 2r)\cos\varphi = d\sin\varphi,$$
$$y - z\sin\varphi = d\cos\varphi$$

et l'équation de la surface est: $(2ry - yz - dx)^2 + (xz - dy)^2 = (2rz - z^2 - d^2)^2$. Chaque point de la droite Q décrit une ellipse, dont le centre est sur l'axe z du cylindre fixe. Pour $d < r$ deux de ces ellipses dégénèrent en des droites doubles U et V, dont l'angle ϑ est déterminé par $tg\vartheta = \sqrt{r^2 - d^2} : d$.

Cette surface peut être engendrée par un segment de longueur fixe se mouvant de manière que ses points extrêmes glissent sur les droites U et V et qu' il ait toujours la même inclinaison au plan de ces deux droites. Pour $d > r$ ces droites sont imaginaires. Pour $d = r$ ces droites sont infiniment voisines; on a, en ce cas, la surface limite, laquelle est engendrée, si les points extrêmes d'un segment infiniment petit glissent sur deux droites infiniment voisines et ayant l'inclinaison constante au plan de ces deux droites; son équation est:

$$(2ry - yz - rx)^2 + (xz - ry)^2 = (z - r)^4.$$

La figure 2. représente les différentes projections de cette surface. La surface limite peut être engendrée par roulement, Q_1 étant une tangente à k. La ligne de striction de la surface (pour $d \gtrless r$) est une courbe du sixième dégré, dont la projection sur le plan du cercle K est une astroïde oblique; l'inclinaison de cette courbe au plan K est définie par l'équation:

$$tg\beta = \frac{2r \sin 2\varphi}{\sqrt{9r^2 \sin^2 2\varphi - d(6r \sin 2\varphi - d)}}.$$

$$\left(\text{Pour } d = o \text{ on a } tg\beta = \pm \frac{2}{3}\cdot\right)$$

Donc, la courbe de striction est une courbe gauche sur le cylindre dont la base est l'astroïde oblique; cette courbe n'est pas pour $d \gtrless o$ une hélice, mais elle devient une hélice pour la valeur spéciale $d = o$, en quel cas la surface devient un hélicoïde composé de quatre surfaces. L'auteur propose le nom pseudohélices pour les courbes gauches qui sont susceptibles de devenir hélices pour des valeurs spéciales; et de même pour les surfaces gauches qui sont susceptibles de devenir hélicoïdes pour des valeurs spéciales, le nom de pseudohelicoïdes.

Alors les résultats s'expriment ainsi:

La ligne de striction de notre surface est une pseudohélice composée de quatre branches et la surface est un pseudohelicoïde composé de quatre manteaux qui se raccordent suivant la droite commune.

L'auteur démontre encore qu' une droite quelconque R fixée au cylindre mobile ne peut engendrer d'autre surface que la droite P ou Q. Toutes les droites d'une direction donné engendrent par le roulement un complexe de droites spécial du deuxième ordre et de la deuxième classe qu'on peut nommer élliptique, puisque chaque point décrit une ellipse.

L'auteur a trouvé des résultats analogues non seulement pour le roulement intérieur, mais aussi pour le roulement extérieur pour les cas où R est égal à r, $2r$, $3r$ . . .