Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hromádko

Dvě poznámky o lichoběžníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 403--407

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123111

Pro $\varrho = \frac{1}{2}$ vyhoví se uvedeným rovnicím na př. hodnotami $a = 3, b = c = d = 1$.

Hodnoty a, b, c, d mohou ovšem býti též záporné: Tak třebas při $a = -3$, $b = c = d = 1$ jsou příčky rozděleny v poměru $\varrho = -\frac{2}{1}$ atd.

Rozšíření této nauky pro libovolný počet bodů je — doufám — patrné. Tak třebas

$$A + B + C + D + E = 5F,$$

kdež *těžiště* F je těžištěm daného pětiúhelníka v obyčejném významu. Upouštím však od toho, jakož i od dalšího zobecnění a rozšíření, neboť mým úmyslem bylo toliko ukázati žákům středních škol prvé počátky postupu, jejž prvý naznačil Ferdinand Möbius *) (1827), a jenž v dalším vývoji stal se vlastně základem nauky zvané dnes vektorová analysis **).

Na úzkou souvislost s *fysikou* jsem poukázal již s počátku, chci jen ještě upozorniti na jednu důležitou okolnost

Z rovnice

$$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda + \mu + \nu) D$$

je patrno, že dle různé volby hodnot λ, μ, ν dostanu různé body roviny, pro jednu volbu ovšem jen jediný. Bod roviny je tudíž těmi hodnotami, dán-li základní trojúhelník ABC, zcela určen. Tím dána je souvislost této nauky *s analytickou geometrií*, neboť ve smyslu analytické geometrie lze považovati hodnoty λ, μ, ν za (homogenní) souřadnice bodu v rovině.

Dvě poznámky o lichoběžníku.

Podává **Fr. Hromádko**, emer. prof.

I. *O sestrojování lichoběžníka z daných jeho stran* (*rozbor*).

Jak povědomo, určen jest lichoběžník čtyřmi danými součástmi, mezi nimiž třeba nejméně dvou délek (strany, úhlopříčky a nejvýše se připouštějí dva úhly a pod.). Mezi rozmanitými

---

*) Viz Ferdinand Möbius: Gesammelte Werke, Bd. I.

**) Viz třebas: E. Jahnke: Vorlesungen über die Vektorenrechnung, 1905.

sestavami úloh o sestrojování lichoběžníka vytknu zde jen dvě, totiž:

Sestrojiti lichoběžník z daných jeho stran. Nazveme-li strany ty a, b, c, d a jestli $a < b < c < d$ a není-li výslovně ustanoveno, které z nich mají býti rovnoběžné strany, tu bývá obyčejně trojí její řešení možno, někdy ovšem jen jedno, ale dvě nikdy. O sestrojování lichoběžníka platí požadavek, dle něhož nutno, aby *rozdíl rovnoběžných jeho stran byl větší než rozdíl stran různoběžných.*

Jedno řešení připouští úloha tato vždy, neboť rozdíl mezi *největší* a nejmenší jeho stranou jest jistě *větší* než rozdíl ostatních obou stran. V tomto případě volíme *největší* a *nejmenší* stranu za rovnoběžné, nad rozdílem jejich jako základnou a z ostatních dvou daných stran sestrojíme trojúhelník, jehož protilehlým k základně vrcholem vedeme k ní rovnoběžku a učiníme ji rovnu jedné rovnoběžné straně lichoběžníka (buď menší aneb větší), prodloužíme protilehlou jeho stranu náležitě atd.

Tím obdržíme lichoběžníky sice *dva*, a to v převrácené poloze. Avšak ježto jsou *shodné*, platí za jeden, t. j. řešení úlohy jest jen *jedno*. Provedením takového sestrojení domníváme se obyčejně, že jsme s úlohou hotovi a v tom se často bezděčně klameme, jak z dalšího rozboru celé úlohy vyjde na jevo.

Jsou-li strany lichoběžníka dány číselně, poznáme na první pohled, kolik lichoběžníků z nich lze sestrojiti. Jsou-li však dány délky stran měřicky a, b, c, d, dlužno poněkud jinak si počínati, totiž opět měřickým výkonem. Tak jest na př. ze stran 3, 4, 5, 6 arci jen *jeden* lichoběžník sestrojitelný, avšak ze stran 3, 4, 5, 7 jsou již *tři* možny, neboť nejen

$$7 - 3 > 5 - 4,$$

ale též

$$7 - 4 > 5 - 3$$

a

$$7 - 5 > 4 - 3.$$

Mohou tudíž rovnoběžnými stranami býti sestavy

$$3 \parallel 7,\ 4 \parallel 7 \text{ a } 5 \parallel 7.$$

Podobné šetření délek a, b, c, d užitím kružítka jako stran lichoběžníka rozhoduje o jedinosti či o mnohosti sestrojitelných lichoběžníků. Chceme zde čtenáři podati jednoduché pravidlo, dle něhož snadno jest v případě tomto určiti, kolik lichoběžníků z daných jeho čtyř stran jest možných.

Jsou-li dány strany číselně, sečteme *nejmenší s největší a pak obě prostřední* a jsou-li tyto součty sobě rovny, jest jen *jeden* lichoběžník z nich sestrojitelný (možný). Jsou-li však ony součty sobě nerovny, jsou tři lichoběžníky sestrojitelny (možny). Ze stran 3, 4, 5, 6 jest na př. jen jeden lichoběžník sestrojitelný, neboť $3 + 6 = 4 + 5 = 9$; avšak ze stran 3, 4, 5, 7 jsou tři lichoběžníky různých podob možné, neboť $3 + 7 > 4 + 5$.

U délek $a < b < c < d$ nanesme součty jejich $a + d$ a $b + c$ na neurčitě dlouhou přímku a změřme je kružítkem a srovnejme je spolu. A tu jest výsledek buď *rovnost* aneb *nerovnost* jejich, t. j. jeden nebo *tři* lichoběžníky možny. Ale proč přímo *tři*, proč ne také *dva*. To jest otázka, která se čtenáři na mysl tlačí. Abychom důležitou tuto otázku nenechali bez odpovědi, nutno blíže přihlédnouti k následující, podrobné úvaze této úlohy.

Buďtež strany lichoběžníka a, b, c, d a $d > c > b > a$ a dále

$$d - c = \delta, \text{ čili } d = c + \delta,$$

$$b - a = \delta', \text{ čili } b = a + \delta',$$

pročež

$$d - b = c - a + (\delta - \delta'). \tag{1}$$

Pro $\delta = \delta'$ jest

$$d - b = c - a, \tag{2}$$

tudíž také

$$d - c = b - a. \tag{3}$$

Mezi nejdelší stranou d a ostatními c, b, a jsou jen tři kladné rozdíly možny $d - a$, $d - b$, $d - c$. Rozdíl první $d - a$ jest vždy větší než oba ostatní rozdíly, které dle (2) a (3) jsou si rovny, pročež v tomto případě toliko *jeden* lichoběžník jest sestrojitelný.

Pro $\delta > \delta'$ jest

$$d - b > c - a, \tag{4}$$

pročež

$$d - c > b - a, \tag{5}$$

a ježto vždy

$$d - a > c - b, \qquad (6)$$

jsou v tomto případě *tři* lichoběžníky čtyřmi jeho stranami určeny.

Pro $\delta < \delta'$ lze rovnici (1) psáti:

$$d - b = c - a - (\delta' - \delta),$$

z níž patrno, že pak

$$d - b < c - a, \quad \text{t. j.} \quad c - a > d - b, \; d - c < b - a$$
$$\text{a} \quad d - a > c - b,$$

tudíž opět 3 lichoběžníky dány.

Seřadíme-li tudíž dané strany d, c, b, a sestupně

$$d > c > b > a,$$

a jsou-li kladné rozdíly prvního a druhého, pak třetího a čtvrtého členu sobě rovny, t. j. $d - c = b - a$, pak jest jen *jeden* lichoběžník sestrojitelný, jinak *tři*. Tím otázka hořejší tuším *přesvědčivě* jest odůvodněna. *)

II. *O sestrojování lichoběžníka z rovnoběžných jeho stran a obou úhlopříček.*

Cílem úkolu našeho jest *sestrojení* obrazce. Toto se může vypraviti dvojí cestou, buď t. zv. *algebraickým* aneb *geometrickým* rozborem. První cesta zdá se pohodlnou a záleží v tom, vypočítati z daných délek obě nerovnoběžné jeho strany, načež by byly všecky čtyři strany známy a sestrojení dle předešlé úlohy možno. Avšak cesta tato jest nejen dlouhá, neschůdná, místy přímo *trnitá*, ale i sestrojování vypočítaných stran jest obšírné a obtížné, pročež se rádi obracíme k rozboru této úlohy, jejž nazýváme *měřickým* (analysí geom.).

*) Lichoběžník *rovnoramenný* čili t. zv. *antiparallelogram* jest určen *třemi* stranami c, b, a a nejsou-li rovnoběžné strany *výslovně udány*, mohou ze tří stran $c > b > a$ vždy *tři* rovnoramenné lichoběžníky sestrojeny býti, neboť rozdíl stejných ramen se rovná nulle a tudíž jsou rozdíly $c - b$, $c - a$, $b - a$ vesměs *větší* než nulla. Proto mohou kterékoliv dvě strany jeho býti k sobě rovnoběžné, čímž trojaká podoba *antiparallelogramu* jest odůvodněna.

Hlavní známka rozboru měřického záleží v tom, že si představujeme předloženou úlohu zpravidla sestrojenou přiměřeně všem požadavkům, tedy *hotovou*. V sestrojeném náčrtu úlohy hledíme pak pomocí různě vedených přímek (rovnoběžek, kolmic, medián a j.) sestrojiti obrazec známým způsobem a od toho postupujíce zpět dle známých měřických vět, docházíme pak k žádanému sestrojení záhadného obrazce. Tak na př. v naší úloze mysleme si lichoběžník $ABCD$ *) sestrojený, vyhovující daným požadavkům, t. j. $DC \parallel AB$ a úhlopříčkami $AC \parallel BD$, a veďme koncem úhlopříčky AC rovnoběžku $CE \parallel DB$ k úhlopříčně druhé, až protne prodlouženou základnu AB v bodě E. I jest $BE = DC$, pročež $\triangle AEC$ jest stranami AE, AC a EC určen. Z daného tohoto trojúhelníka sestrojíme pak žádaný lichoběžník $ABCD$ vedením $CD \parallel AE$, spojením D s A a C s B, neboť délka AB jest dána. Tedy zbývá úloha známá: „Sestrojiti trojúhelník ze součtu obou rovnoběžných stran lichoběžníka, které jsou dány, a z daných jeho úhlopříček, taktéž daných.“ Úloha tato uvedena je tudíž na úlohu jednodušší a známou a proto řešena. Řešením algebraickým téže úlohy nabýváme úloh nových, namnoze složitějších a nepřístupnějších, ale někdy nezbývá jiné cesty než této široké silnice, z níž pak odbočujeme na pěšinku geometrickou, která tvoří takořka *stezku* kratší a pohodlnější než jest široká cesta algebraická.

Součty některých řad.

Napsal **K. Čupr.**

1. Máme-li sečísti řadu

$$S_1 = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos m\alpha, \qquad (1)$$

násobme každý člen $2 \sin\alpha$ a použijme vzorce

$$2 \cos k\alpha \sin\alpha = \sin(k+1)\alpha - \sin(k-1)\alpha.$$

---

*) Laskavý čtenáři, načrtniž si obrazec sám a označ $ABCD$.