Jak z obrazu vidno, je úhel $\beta = fo'_1 a_1 = R - \alpha$ a úhel $\beta' = fo_1 b = 3R - 3\alpha = 3\beta$; pohybují se tedy body a_1 a b v kružnici K_1 v témž směru rychlostmi poměru 1 : 3, obalují proto jejich spojnice A_2 epicykloidu o dvou úvratech, tak zvanou nefroidu, pro niž jest K_1 kružnicí opsanou. Promítáme-li danou plochu s obecného bodu osy O na rovinu kolmou k této, pak promítají se kružnice K a K' do dvou soustředných kružnic, v nichž pohybují se průměty bodů a a a v témž směru rychlostmi, jichž poměr jest 1 : 2, i obalují jejich spojnice, průměty to površek, evoluty Paskalových závitnic. (Pokrač.)

Strojení plochy druhého stupně za podmínky dotyku čtyřbodového s kuželosečkou.

Napsal dr. **Jos. Kounovský.**

1. Pro sestrojení plochy druhého stupně dané devíti body byla podána celá řada konstrukcí, hlavně pro případ zcela obecné polohy daných bodů, t. j. takové, kdy dá se vždy toliko třemi danými body položiti rovina.

Chceme v následujícím řešiti speciální konstrukce plochy stupně druhého $\mathbf{P}^2$, do jejíhož určení devíti body vchází podmínka čtyřbodového dotyku dané kuželosečky v daném bodě. Patrně řez plochy $\mathbf{P}^2$ rovinou dané kuželosečky musí s ní v bodě daném míti tento čtyřbodový dotyk a byl by dalším pátým bodem určen. Uvažovaná oskulace vyššího stupně nahrazuje tudíž čtyři body dané v téže rovině; dalších pět prvků dlužno ještě voliti. Jako zvláštní případ vystupuje pak úloha sestrojiti plochu druhého stupně procházející daným bodem a dotýkající se dvou daných kuželoseček v daných bodech dotykem čtyřbodovým.

Všecky známé konstrukce plochy $\mathbf{P}^2$ neřeší problém vše-obecně, mnohé omezují se na úlohu, určiti na paprsku jedním z devíti daných bodů procházejícím druhý jeho průsečík s danou plochou. Nejvšeobecnější řešení určuje prostorovou soustavu polární, jejíž plochou direkční jest daná $\mathbf{P}^2$.

Nejstarší známá konstrukce plochy $\mathbf{P}^2$ pochází od *Hesse-ho** a vystihuje úlohu úplně, stanovíc pro libovolný bod v prostoru jeho polární rovinu vzhledem k $\mathbf{P}^2$. Modifikované konstrukce Hesse-ovy, již provedli *J. Thomae* a *K. Rohn*, použil pan professor *J. Sobotka* k sestrojení plochy $\mathbf{P}^2$ oskulující tři dané kuželosečky**).

2. Vůdčí zásadou při sestrojování plochy druhého stupně $\mathbf{P}^2$ z devíti daných bodů 1, 2, ... 9 jest stanovení vzájemného vztahu tří kuželoseček, které vytínají z plochy $\mathbf{P}^2$ tři roviny určené třemi trojinami daných devíti bodů, na př. 123, 456 a 789, a záležejícího v tom, že dvě a dvě kuželosečky protínají příslušnou průsečnici svých rovin v těchže dvou bodech, samodružných to prvcích bodové involuce, která náleží průsečnici v prostorové soustavě polární, jejíž direkční plochou jest daná plocha $\mathbf{P}^2$.

V tom směru odvozuje také určení prostorové polární soustavy dané devíti body své plochy direkční *K. Bobek* v práci: „Über Constructionen von Flächen zweiter Ordnung aus imaginären Bestimmungsstücken" ***). Methoda Bobkova hodí se pro naše speciální konstrukce.

Plocha druhého stupně $\mathbf{P}^2$ jest dle ní určena rovinnou soustavou polární ($\mathbf{S}$) v rovině $\mathbf{S}$, pólem S této roviny vzhledem k $\mathbf{P}^2$ a libovolným bodem plochy na př. 9. Položíme-li přímkou $9S$ libovolnou rovinu $\mathbf{T}$ a sestrojíme v ní kuželosečku procházející bodem 9, indukující na průsečnici $\mathbf{ST}$ tutéž involuci, která jí přísluší v polární soustavě ($\mathbf{S}$), a mající bod S a přímku $\mathbf{ST}$ za pól a sdruženou poláru, náleží tato kuželosečka ploše $\mathbf{P}^2$, kterou lze takto strojiti.

Dvěma rovinnými soustavami polárními ($\mathbf{R}$) a ($\mathbf{S}$) v rovinách $\mathbf{R}$ a $\mathbf{S}$, které indukují na průsečnici $\mathbf{RS}$ identické involuce, prochází celý svazek ploch druhého stupně a to každým bodem v prostoru, na př. 9, jedna určitá.

*) »Über die Konstruktion der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Punkte gegeben sind«. Crelle, Journal f. r. u. ang. Mathematik, sv. 24., 1842.

**) »Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide von Regelflächen«. Zasedací zprávy král. české společnosti nauk. 1908, čís. XXI.

***) Zasedací zprávy královské české společnosti nauk, 1882.

Jsou-li R_0 a S_0 póly paprsku **RS** v soustavách (**R**) a (**S**), jest paprsek R_0S_0 s paprskem RS sdružen vzhledem ku plochám svazku. Rovina $9R_0S_0$ protíná roviny **R** a **S** v přímkách r a s; sestrojíme-li v ní kuželosečku k^2 procházející bodem 9 a indukující na přímkách r a s tytéž involuce bodové, jež jim přísluší v rovinných soustavách polárních (**R**) a (**S**), nachází se k^2 na ploše **P**^{2} bodem určené; pól R přímky r vzhledem ku k^2 nachází se na R_0S_0 a jest pólem roviny **R** vzhledem k **P**^{2}. Plochu **P**^{2} možno pak rýsovati z rovinné polární soustavy (**R**) v rovině **R**, jejího pólu R a bodu 9. Rovina S skutečně vytíná z takto determinované prostorové polární soustavy rovinnou polární soustavu (**S**) dříve danou.

V citované práci dokazuje *Bobek*, že všechny plochy druhého stupně, patřící svazku určenému dvěma rovinnými polárními soustavami (**R**) a (**S**), které indukují na průsečnici svých rovin tutéž involuci, protínají libovolnou přímku v bodech téže involuce. I možno pak sestrojovati plochu **P**^{2}, určenou mimo to bodem 9, tak, že sestrojí se bodem 9 libovolná rovina a v té rýsuje se kuželosečka plochy **P**^{2} tak, aby indukovala na průsečnicích roviny s rovinami **R** a **S** tytéž bodové involuce jako soustavy (**R**) a (**S**).

3. Dle zásady právě uvedené možno *sestrojiti plochu* **P**^{2} *danou bodem* 9 *a dotýkající se dvou daných kuželoseček v rovinách* **R** *a* **S** *dotykem čtyřbodovým* 1—4 *a* 5—8.

V rovinách **R** a **S** jsou dány čtyřbodovými dotyky 1—4 resp. 5—8 svazky kuželoseček. Ony dvě kuželosečky z obou svazků, které indukují na průsečnici **RS** tutéž bodovou involuci, jsou direkčními křivkami rovinných polárních soustav (**R**) a (**S**), které s bodem 9 plochu **P**^{2} dle článku předešlého určují.

Bodovou involuci na průsečnici **RS** obdržíme konstrukcí společné bodové dvojiny v involucích soumístných, indukovaných na **RS** oběma svazky kuželoseček čtyřbodových dotyků 1—4 a 5—8 Tato společná dvojina dává samodružné prvky involuce hledané.

Pak možno sestrojiti danou plochu oběma cestami v čl. 3. naznačenými.

4. Obraťme se nyní k řešení úlohy *strojiti plochu druhého stupně danou čtyřbodovým dotykem* 1—4 *v daném bodě*

dané kuželosečky v rovině R *a dalšími pěti body* 5, 6, 7, 8 *a* 9 *polohy obecné.*

Označíme-li S rovinu určenou třemi z těchto pěti bodů, na př. 5, 6 a 7, sluší určiti v rovinách R a S direkční kuželosečky těch polárních soustav indukujících na průsečnici RS tutéž involuci, které s bodem 8 určují plochu P^2, na které nachází se též bod 9; tím jest řešení převedeno na předcházející.

Za tím účelem vytkněme ze svazku ploch druhého stupně, určeného body 1—4, 5, 6, 7, 8 dvě tyto plochy, na př. tak, že libovolným bodem (devátým) na průsečnici RS stanovíme obě kuželosečky těchto ploch v rovinách R a S na RS se protínajících. Volbou těchto bodů na RS jsou stanoveny kuželosečky dotyku čtyřbodového v rovině R a tedy i kuželosečky v rovině S. Dále protněme obě plochy svazku o základních bodech 1, 2, ... 8 rovinou T $\equiv$ 7, 8, 9. Rovina vytíná ze svazku ploch svazek kuželoseček o dvou základních bodech 7, 8, druhé dva 7', 8' dlužno sestrojiti jako průsečíky obou kuželoseček, v kterých protíná rovina T zvolené dvě plochy svazku; kuželosečky ty určeny jsou body na průsečnicích RT a ST.

Ona kuželosečka z uvažovaného svazku v rovině T, která prochází bodem 9, t. j. kuželosečka určená body 7, 8, 7', 8', 9, patří již hledané ploše P^2; její průsečíky s průsečnicemi RT a ST stanoví pak průsečné kuželosečky plochy P^2 rovinami R a S v příslušných svazcích kuželoseček.

Tím dány jsou tři rovinné soustavy polární (R), (S) a (T), které po dvou určují na průsečnicích RS, RT a ST vždy tutéž involuci. Tím však určena jest celá prostorová polární soustava, jejíž direkční plochou jest daná plocha P^2 (Bobek).

5. Je-li *sestrojiti plochu* P^2 *mající s danou kuželosečkou v daném bodě dotyk čtyřbodový, oskulující jinou kuželosečku v daném bodě a procházející mimo to dvěma danými body,* možno postupovati týmž způsobem jako v případě předcházejícím. Obě oskulace zastupují body 1—4 a 5—7; dané body označíme ještě 8 a 9.

Jestliže mimo to body 8 a 9 splynou, jest řešena tím úloha *strojení plochy* P^2 *za daného dotyku čtyřbodového, trojbodového a dvoubodového.*

6. *Strojení plochy* **P**^{2} *dané čtyřbodovým dotykem s danou kuželosečkou v daném bodě, dvěma dalšími body a přímkou.*

Daná přímka zastupuje, jak známo, tři určovací prvky. Plocha jest sborcená. V rovině **R** čtyřbodového dotyku 1—4 jest kuželosečka plochy **P**^{2} již stanovena, a to průsečíkem *M* s danou přímkou *p* na ploše. Označme dané dva body 5, 6, položme jimi a bodem čtyřbodového dotyku rovinu **S** a sestrojme průsečík *N* přímky *p* a roviny **S**. Kuželosečka plochy **P**^{2} v rovině **S** jest pak určena body 5, 6, *N* a podmínkou, že indukuje na průsečnici **RS** involuci totožnou s involucí indukovanou na ní kuželosečkou 1—4, *M*. Sestrojení roviny **S** bodem čtyřbodového dotyku poskytuje hned jeden bod samodružný té involuce v tomto bodě.

Sestrojíme-li nyní přímkou *p* libovolnou rovinu **T**, prochází její průsečnice *r* s rovinou **R** bodem *M* a průsečnice *s* s rovinou **S** bodem *N*. Průsečnice *r* resp. *s* protíná kuželosečku v rovině **R** resp. **S** ještě v jednom bodě; spojnice *t* obou bodů protíná v rovině **T** přímku *p* a leží tedy na ploše.

Svazek rovin **T** poskytuje tak celou soustavu plošných přímek *t* dané plochy **P**^{2}.

7. Přihlédněme ještě ku strojení plochy **P**^{2} určené mimo podmínku dotyku čtyřbodového dále dvojinami bodů imaginárných.

Je-li *sestrojiti plochu* **P**^{2} *danou čtyřbodovým dotykem dané kuželosečky v daném bodě, dvojinou imaginárných bodů a třemi body reálnými,* provedeme konstrukci jako v čl. 4. Označíme jen daný čtyřbodový dotyk 1—4, dvojinu imaginárných bodů (5, 6), kterou určíme jako samodružné body dané elliptické involuce na dané přímce, a body reálné 7, 8, 9. Rovina **S** určena jest pak nositelkou bodové involuce a bodem 7, jinak jest konstrukce táž.

Zbývá ještě *strojení plochy* **P**^{2} *dané čtyřbodovým dotykem dané kuželosečky v daném bodě, dvěma dvojinami imaginárných bodů a dalším bodem reálným.*

Označme opět čtyřbodový dotyk 1—4 v rovině **R**, obě dvojiny imaginárných bodů (5, 6) a (7, 8) zvolme jako samodružné body elliptických involucí vytčených na přímkách *s* a *t*, reálný bod označme 9. Přímkou s položme dále libovolnou rovinu **S** a přímkou t rovinu **T** tak, aby procházela též bodem 9.

Uvažujme dále svazek ploch druhého stupně o základních bodech 1—4, (5, 6), (7, 8). Abychom jednu plochu toho svazku vytkli, dlužno sestrojiti body základními kuželosečky o známém vztahu. Zvolme v rovině **R** kuželosečku dotyku čtyřbodového; ta nechť protne průsečnici **RS** v bodech U a V a průsečnici **RT** v bodech X a Y. Ony dvě kuželosečky ze svazků o bodech základních (5, 6), U, V a (7, 8), X, Y v rovinách **S** resp. **T**, které procházejí společnou dvojinou involucí určených na průsečnici **ST** oběma svazky, stanoví již plochu svazku.

Svazek ploch protat jest rovinou **T** ve svazku kuželoseček o dvou základních bodech (7, 8). Sestrojíme-li v tomto svazku kuželosečku procházející bodem 9, patří již hledané ploše P^2 a určí průsečíky na **RT** a **ST** kuželosečky plochy v těchto rovinách, čímž plocha dle dřívějšího stanovena.

Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského.

Napsal Dr. **Arnošt Dittrich**, professor v Třeboni.

Maxwellový rovnice v křivočarých orthogonálních souřadnicích. Křivočaré orthogonální souřadnice jsou ξ, η, ζ. Složky síly elektrické směrem rostoucího ξ, η, ζ jsou X, Y, Z; složky síly magnetické jsou L, M, N. Element délkový ds dán relací

$$ds = a_1^2\, d\xi^2 + a_2^2\, d\eta^2 + a_3^2\, d\zeta^2.$$

Pak zní Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{K}{V}\, a_2 a_3 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(M a_2) - \frac{\partial}{\partial \eta}(N a_3) \\
\frac{K}{V}\, a_3 a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi}(N a_3) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(L a_1) \qquad (1) \\
\frac{K}{V}\, a_1 a_2 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta}(L a_1) - \frac{\partial}{\partial \xi}(M a_2),
\end{aligned}$$

kde K je dielektrická konstanta ústředí, V rychlost světla.