Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Novotný

Sestrojení polár kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 5, 235--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123081

bude: $$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} : \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\overline{mc}}{\overline{m'c}},$$

čili $$\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\overline{mc}}{\overline{m'c}},$$

t. j. $$\frac{\overline{mc}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\overline{m'c}}{\operatorname{tg}\varphi'} = \text{Const.}$$

Pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jest dle definice předeslané $\overline{mc} = p$; a ježto $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, platí obecně

$$\frac{\overline{mc}}{\operatorname{tg}\varphi} = p, \quad \text{čili} \quad \overline{mc} = p \operatorname{tg}\varphi.$$

(Dokončení.)

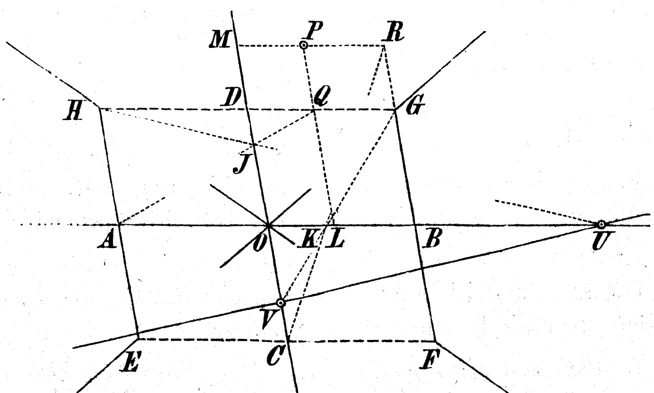
Sestrojení polár kuželoseček.

Žákům středních škol podává

Josef Novotný,
professor v Přerově.

(Dokončení.)

6. *Jest sestrojiti poláru bodu P k hyperbole, objeví-li se průsečíky s dvojinou sdružených průměrů na nákresně.*



Obr. 5.

Sestrojení. Bodem P (obr. 5) sestrojme rovnoběžky se sdruženými průměry, ty protnou bližší strany opsaného rovnoběžníka v bodech Q, R. Sestrojme dále spojnice AQ, CR, obdržíme na průměrech body J, K. Paprsky HJ, GK určují na průměrech body U, V, jimiž polára prochází.

Důkaz. Buďtež AB $= 2a$, CD $= 2b$ v osách soustavy souřadnic rovnoběžných, bod P určen souřadnicemi $x = m$, $y = n$.

Rovnice poláry zní:

$$b^2mx - a^2ny = a^2b^2.^{*)} \qquad (1)$$

Z podobných trojúhelníků AUJ, HQJ vyvodí se jako při ellipse v odst. 2.:

$$\mathrm{OU} = \frac{a^2}{m}. \qquad (2)$$

Z podobných trojúhelníků COK, RBK jest:

$$\mathrm{VO} : \mathrm{CO} = \mathrm{BG} : \mathrm{BR},$$

z čehož

$$\mathrm{VO} = \frac{b^2}{n}. \qquad (3)$$

Pro průsečík poláry s průměrem AB položme v rovnici (1) $y = 0$, i vyjde

$$x = \frac{a^2}{m}. \qquad (4)$$

Pro průsečík poláry s průměrem CD položme v rovnici (1) $x = 0$, i vyjde

$$y = -\frac{b^2}{n}. \qquad (5)$$

Srovnáním hodnot (2), (4); (3), (5) a se zřetelem k tomu, že $\mathrm{OV} = -\mathrm{VO} = -\frac{b^2}{n}$ shledáme, že polára prochází body U, V.

Z hodnoty OL $= m$ se zřetelem k rovnici (2) jest:

$$\mathrm{OU} . \mathrm{OL} = \overline{\mathrm{OB}}^2,$$

t. j. body U, L jsou harmonická dvojina vzhledem k A, B.

Poznamenání. Sestrojíme-li spojnice BQ, DR, obdržíme na průměrech body J', K'. Paprsky GJ', FK' procházejí též body U, V.

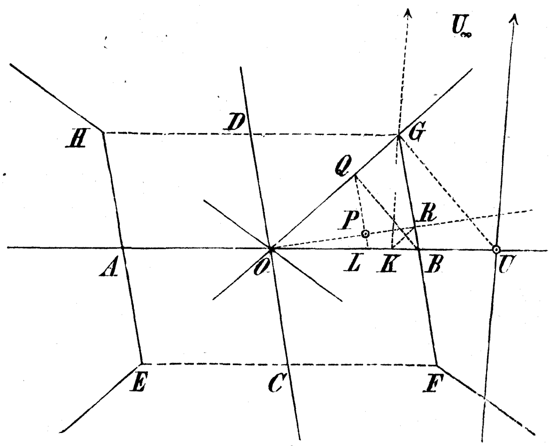
Jak lze stanoviti body U, V z průsečíků Q_*, R_* na vzdálenějších stranách ležících?

7. ***Jest sestrojiti poláru bodu P k hyperbole, objeví-li se jeden z průsečíků poláry s dvojinou sdružených průměrů mimo nákresnu.***

---

*) Viz Jandečka, Anal. geom., 2. vyd., pag. 112.

Sestrojení. Bodem P (obr. 6.), jehož polára seče v bodě U průměr AB, sestrojme rovnoběžku se sdruženým průměrem CD, ta protne bližší asymptotu EG v bodě Q. Paprsek bodem G rovnoběžně se spojnicí QB sestrojený určí na průměru AB bod U poláry.



Obr. 6.

Spojme dále bod P se středem hyperboly, průsečíkem R na bližší straně rovnoběžníka sestrojme rovnoběžku s bližší asymptotou EG, i vznikne na průměru AB bod K. Paprsek GK určuje úběžný bod U_∞ poláry.

Důkaz. Bod P budiž určen souřadnicemi $x = m$, $y = n$. I zní rovnice poláry:

$$b^2mx - a^2ny = a^2b^2. \tag{1}$$

Z podobných trojúhelníků OLQ, OBG vyvodí se jako při ellipse v odst. 3.:

$$\mathrm{OU} = \frac{a^2}{m}. \tag{2}$$

Z rovnice (1) pro $y = 0$ vyjde:

$$x = \frac{a^2}{m}. \tag{3}$$

Hodnoty (2), (3) značí, že polára prochází bodem U.

Z podobných trojúhelníků OLP, OBR plyne $\mathrm{BR} = \dfrac{an}{m}$.

Z podobných trojúhelníků KBR, OBG jest:

$$\mathrm{OK} = \frac{a(bm - an)}{bm},$$

jakožto úsečka bodu K.

Směrnice A přímky KG určí se ze souřadnic bodů K, G:

$$\mathrm{A} = \frac{b^2 m}{a^2 n}. \tag{4}$$

Z rovnice (1) vyjde směrnice A′ poláry:

$$\mathrm{A}' = \frac{b^2 m}{a^2 n}. \tag{5}$$

Z rovnic (4), (5) plyne rovnoběžnost přímek KG, UU_∞.

Poznamenání 1. Jsou-li ξ_1 η_1, ξ_2 η_2 souřadnice průsečíků T, T_* poláry s hyperbolou, platí pro PT, PT_*:

$$b^2 \xi_1 x - a^2 \eta_1 y = a^2 b^2, \tag{α}$$

$$b^2 \xi_2 x - a^2 \eta_2 y = a^2 b^2. \tag{β}$$

Rozdíl a součet rovnic (α), (β) dá se zřetelem k hodnotám pro $\xi_1 \mp \xi_2$, $\eta_1 \mp \eta_2$:

$$my = nx, \tag{γ}$$

$$b^2 mx - a^2 ny = b^2 m^2 - a^2 n^2, \tag{δ}$$

jakožto rovnice harmonické dvojiny paprsků PO, PU_∞, vzhledem k dvojině PT, PT_*.

Paprsek PU_∞ jest rovnoběžný s polárou UU_∞ a paprsek PO půlí tětivu TT_*.

Poznamenání 2. Sestrojíme-li bodem E rovnoběžku se spojnicí AQ, přijdeme též k bodu U.

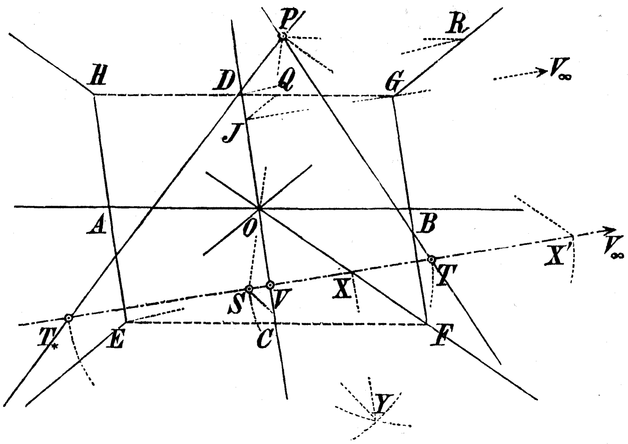
Sestrojíme-li bodem R rovnoběžku s asymptotou FH, vznikne na průměru bod K′. Paprsek FK′ stanoví též směr poláry.

Jak lze stanoviti body U, U_∞ z průsečíků Q_*, R_* na vzdálenější asymptotě a straně?

Poznamenání 3. Když jest sestrojiti poláru v tom případě, že leží pouze průsečík V s průměrem CD v mezích nákresny (obr. 7.), užije se k stanovení úběžného bodu V_∞ a průsečíku V bodů Q, R, v nichž seče spojnice bodu P se středem bližší stranu a rovnoběžka bodem P s průměrem AB bližší asymptotu.

Odstavec 7. obsahuje jiný spůsob sestrojení průsečíků U, V s dvojinou sdružených průměrů.

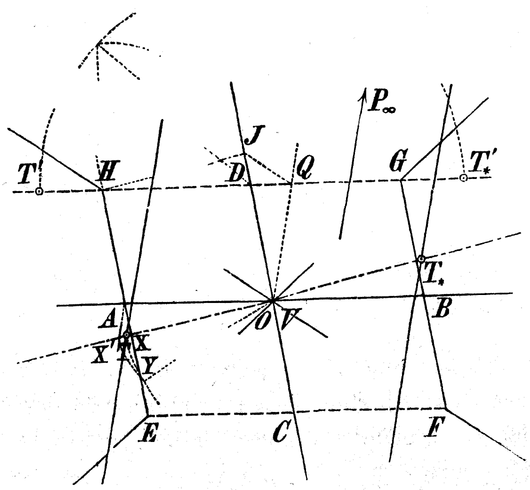
8. Polára bodu P může sloužiti k *sestrojení tečných z bodu P k hyperbole.* Přímka PO (obr. 7.) půlí tětivu TT_*.



Obr. 7.

Některá tečná strana aneb asymptota protne poláru v bodě X, k němuž se snadno vyšetří bod X′ harmonický vzhledem k T, T_*, tak že další sestrojení spočívá ve vyhledání střední úměrné mezi délkami SX, SX′ dle relace $\overline{ST}^2 = \overline{ST_*}^2 = SX \cdot SX'$.

9. Když jest *sestrojiti tečné bodem úběžným P_∞ k hyperbole*, přejde polára v průměr a stačí znáti jeho směr. Za tím účelem se sestrojí středem hyperboly (obr. 8.) rovnoběžka se



Obr. 8.

směrem P_∞, ta určí bod Q, z něhož se odvodí bod J, a spojnice HJ udává směr průměru sdruženého. Průsečíky T, T_* průměru s hyperbolou procházejí tečné rovnoběžně s daným směrem.

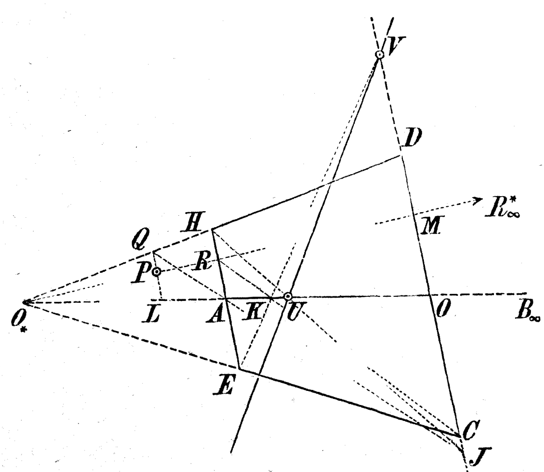
Poznamenání. Dle odstavce 8. lze vyšetřiti průsečíky T, T_* přímky s hyperbolou, najdeme-li k ní příslušný pol P.

Dle odstavce 9. najdou se průsečíky T, T_* průměru s hyperbolou stanovením polu P_∞.

V obrazci 8. jsou též stanoveny průsečíky T′, T'_* strany GH s hyperbolou.

10. *Jest sestrojiti poláru bodu P k parabole, objeví-li se průsečíky s tětivou a sdruženým průměrem na nákresně.*

Sestrojení. Bodem P (obr. 9.) sestrojme rovnoběžku s tětivou CD, ta protne tečnou DH v bodě Q. Spojnice AQ určí na tětivě bod J a paprsek HJ stanoví bod U.



Obr. 9.

Dále spojme bod P s průsečíkem O_* tečných CE, DH, čímž na tečné EH povstane bod R. Spojnice CR protne průměr AB_∞ v bodě K, a přímka EK určí na tětivě CD bod V. Spojnice UV jest polára.

Důkaz. Budiž AO $= c$ v ose X, tečná EH $= b$ v ose Y rovnoběžných souřadnic; bod P budiž určen $x = m$, $y = n$, i jest rovnice paraboly $y^2 = \frac{b^2}{c} x$, tedy rovnice poláry

$$ny = \frac{b^2}{2c}(x + m).^{*)} \tag{1}$$

Z podobných trojúhelníků O_*LQ, O_*AH se najde

$$LQ = \frac{b(c+m)}{2c}.$$

Z trojúhelníků LAQ, AJO; AUH, UJO jest

$$JO = -\frac{b(c+m)}{2m},$$

a

$$AU = -m. \tag{2}$$

Z podobných trojúhelníků O_*LP, O_*AR jest

$$AR = \frac{nc}{c+m}.$$

Z podobných trojúhelníků CVK, ERK plyne

$$OV : CO = EA : AR,$$

z čehož

$$OV = \frac{b^2(c+m)}{2cn}. \tag{3}$$

Pro průsečík poláry s průměrem AB_∞ položme v rovnici (1) $y = 0$, vyjde

$$x = -m. \tag{4}$$

Pro průsečík poláry s tětivou CD položme v rovnici (1) $x = c$, vyjde

$$y = \frac{b^2(c+m)}{2cn}. \tag{5}$$

Z rovnic (2), (4); (3), (5) poznáváme, že polára prochází body U, V.

Z hodnoty $OM = \frac{2nc}{c+m}$ se zřetelem k rovnici (3) jest

$$OV . OM = \overline{OD}^2,$$

t. j. body V, M jsou harmonická dvojina vzhledem k C, D.

Poznamenání. Sestrojíme-li bodem Q rovnoběžku s průměrem AB_∞ a bodem J' na tětivě rovnoběžku s tečnou DH,

---

*) Viz Jandečka, Anal. geom., 2. vyd., pag. 125.

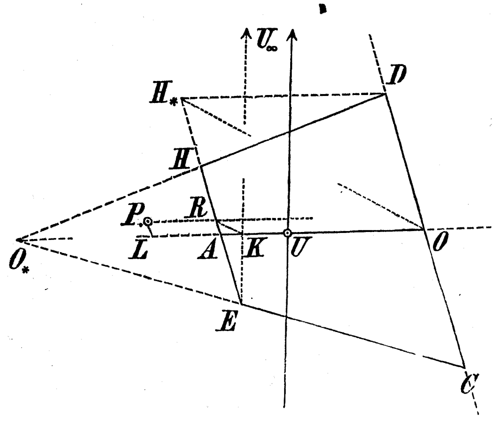
určí se též bod U. Spojnice DR určí na průměru bod K' a paprsek HK' vede též k bodu V.

Bod R_* nalézá se zde na tečné v nekonečnu, a známe tedy směr R^*_∞; sestrojíme-li rovnoběžku bodem C, vznikne na AB_∞ bod K_*, a rovnoběžka tímto s tečnou CE určí též bod V. Podobně se mohlo užiti bodu D.

Jak lze stanoviti bod U z průsečíku Q_* na tečné CE?

11. *Jest sestrojiti poláru bodu P k parabole, objeví-li se jen průsečík s průměrem AB_∞ na nákresně.*

Sestrojení. Bodem P (obr. 10.) sestrojme rovnoběžku s tětivou CD, ta protne průměr v bodě L; přenesme úsečku AL od bodu A v opačném směru a obdržíme bod U poláry.



Obr. 10.

Sestrojme dále bodem P rovnoběžku s průměrem AB_∞, průsečíkem R na tečné rovnoběžku s OH_*, tím vznikne na AB_∞ bod K a paprsek EK určuje směr U_∞ poláry.

Důkaz. Jest-li $AO = c$, $EH = b$ jsou v osách X, Y a jsou-li $x = m$, $y = n$ souřadnice bodu P, zní rovnice poláry

$$ny = \frac{b^2}{2c}(x + m). \tag{1}$$

Dle sestrojení jest

$$AU = LA = -m. \tag{2}$$

Pro průsečík poláry s průměrem AB_∞ jest v rovnici (1) $y = 0$, tedy

$$x = -m. \tag{3}$$

Z rovnic (2), (3) soudíme, že bod U náleží poláře.

Dále jest AR = LP = n jakožto pořadnice bodu R.

Z podobnosti trojúhelníků AKR, AOH$_*$ jest

$$\mathrm{AK} = \frac{cn}{b}.$$

Ze souřadnic bodů E, K určí se směrnice

$$\mathrm{A} = \frac{b^2}{2cn}. \tag{4}$$

Z rovnice (1) jest směrnice poláry

$$\mathrm{A}' = \frac{b^2}{2cn}. \tag{5}$$

Z rovnic (4), (5) plyne rovnoběžnosť přímek EK, UU$_\infty$.

Poznamenání 1. Jsou-li $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ souřadnice průsečíků T, T$_*$ poláry s parabolou, platí pro PT, PT$_*$:

$$\eta_1 y = \frac{b^2}{2c}(x + \xi_1), \tag{α}$$

$$\eta_2 y = \frac{b^2}{2c}(x + \xi_2). \tag{β}$$

Rozdíl a součet rovnic (α), (β) dá se zřetelem k hodnotám $\xi_1 \mp \xi_2$, $\eta_1 \mp \eta_2$:

$$y = n, \tag{γ}$$

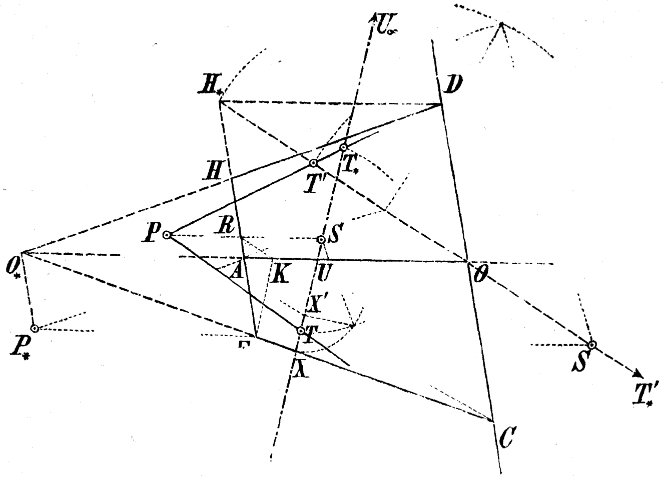
$$ny = \frac{b^2}{2c}x + \left(n^2 - \frac{b^2}{2c}m\right), \tag{δ}$$

jakožto rovnice harmonické dvojiny paprsků PB$_\infty$, PU$_\infty$ vzhledem k dvojině PT, PT$_*$.

Jelikož jest paprsek PU$_\infty$ rovnoběžný s UU$_\infty$, půlí PB$_\infty$ tětivu TT$_*$.

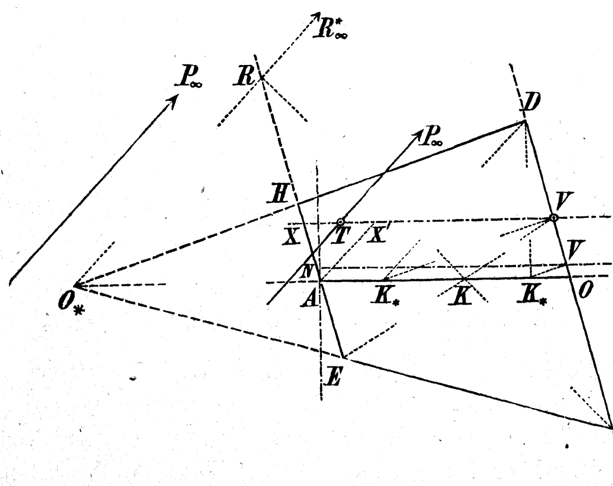
Poznamenání 2. Sestrojíme-li bodem R rovnoběžku s přímkou OE$_*$, vyjde bod K′, a paprsek HK′ určí též bod U$_\infty$.

12. Polára bodu P může sloužiti k *sestrojení tečných z bodu P k parabole.* Rovnoběžka bodem P s průměrem AB$_\infty$ (obr. 11.) půlí tětivu TT$_*$. Tečná CE protne poláru v bodě X, k němuž harmonický se určí paprskem PC. Z bodů X, X′ se najdou body T, T$_*$ na základě relace $\overline{\mathrm{ST}}^2 = \overline{\mathrm{ST}_*}^2 = \mathrm{SX} \,.\, \mathrm{SX}'$.



Obr. 11.

13. Když jest *sestrojiti tečnou bodem úběžným P_∞ k parabole*, přejde polára v průměr a stačí znáti jeho průsečík s tětivou CD. Za tím účelem se sestrojí průsečíkem O_* (obr. 12.) rovnoběžka se směrem P_∞, ta určí bod R, z něhož se odvodí bod K a spojnice EK stanoví bod V, jímž prochází průměr rovnoběžně s AO. Tečná půlí pak v bodě T vzdálenost XX'.



Obr. 12.

Zde lze k stanovení bodu V výhodně užiti bodu R^*_∞, totiž rovnoběžky bodem D se směrem P_∞, čímž vznikne bod K_*, a rovnoběžka tím bodem s tečnou DH určí bod V. Též lze užiti k témuž cíli bodu C.

Poznamenání. V odstavci 13. obsažen jest jednoduchý prostředek k stanovení *osy paraboly*. Jedná se tu patrně o sestrojení tečné bodem úběžným P_∞, jehož směr jest kolmý k AB_∞. Spustíme-li z bodu D (obr. 12.) kolmici na AO, vznikne bod K_*, a rovnoběžka tímto bodem s DH určí bod V, jímž prochází osa. Vrchol N paraboly půlí délku XX'.

Dle odstavce 12. lze vyšetřiti průsečíky T, T_* přímky s parabolou, najdeme-li k ní příslušný pol P.

Dle odstavce 13. najde se průsečík T průměru s parabolou stanovením polu P_∞.

Obrazec 11. obsahuje též sestrojení průsečíků T', T'_* přímky OH_* s parabolou.

V Přerově, 1886.

Poznámka o křivkách rovinných.

Z dopisu, který redaktoru těchto listů zaslal prof. **V. Jeřábek** v Brně.

Ve výroční zprávě městské střední školy v Praze za školní rok 1888 Vámi podaný jednoduchý a pěkný vzorec pro součet pravoúhlých průmětů průvodiče a normály na ose polárné přivedl mne k tomu, že týž vzorec plyne z polárné rovnice normály, jakož i, že podobně analogické vzorce jiné obdržeti lze.

V polárné soustavě dána buď křivka a na této bod $M(\varrho_1, \omega_1)$; tečna příslušná protínej osy X, Y v bodech N, P. Rovnice tečny té jest

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} \cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1),$$

kdež položeno

$$d\left(\frac{1}{\varrho_1}\right) = \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)' d\omega .$$

Klademe-li $\omega = 0$, a vynecháme-li pak přípony při souřadnicích ϱ_1, ω_1, obdržíme