Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Elementární odvození vzorce pro kvadraturu křivek $y = Cx^p$ pro jakékoliv p

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 4, 246--254

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123071

dvojice soujemných kořenů jedna

$$x_1 = a + bi, \qquad x_2 = a \quad bi,$$

a podobně druhá

$$x_3 = c + di, \qquad x_4 = c - di,$$

což pomocí reálního kořene naší resolventy, většího nežli 5, přesněji možná vyčísliti.

Elementární odvození vzorce pro kvadraturu křivek $y = Cx^p$ pro jakékoliv realné p.

Píše

Vilém Jung,

professor státní průmyslové školy v Praze.

1. Pro plochu obrazce, omezeného osou úseček, dvěma pořadnicemi a příslušným obloukem křivky

$$y = Cx^p,$$

platí pro jakékoliv realné p, vyjímaje hodnotu $p = -1$, vzorec

$$(1) \qquad \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{Cx_2^{p+1} - Cx_1^{p+1}}{p+1} = \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{p+1}.$$

Pro $p = -1$ platí vzorec

$$(2) \qquad \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}\,[lx_2 - lx_1].$$

Tento vzorec se obyčejně dokazuje elementárně umělým způsobem geometrickým pro $p = 2$ (pro parabolu 2. stupně) a pro jakékoliv *celistvé* a *kladné* p (paraboly vyšších stupňů) pomocí vyšších řad arithmetických anebo také zvláštními obraty.

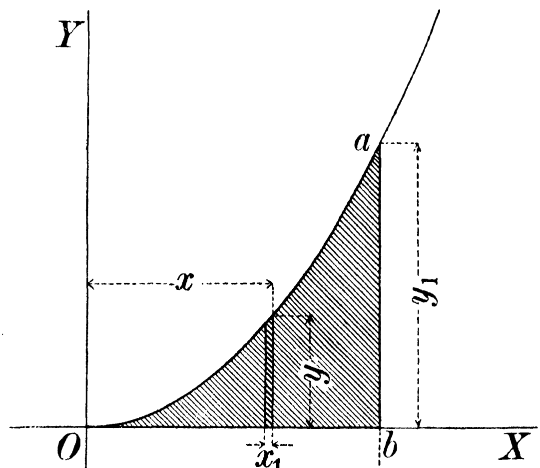
Prof. Dr. Gustav Holzmüller,*) jenž se snaží odvozovati

*) „Mechanische Plaudereien.“ Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1896, Nro 6., 9.
„Die Ingenieur-Mathematik“ in elementarer Behandlung. Teubner-Leipzig 1897.

v elementární formě různé mathematické problémy, důležité pro geometrii a mechaniku, jež se obyčejně na základě vyšší mathematiky řeší, provádí ve své knize „*Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik*" I., II., III. Theil, 1895 (Teubner-Leipzig) důkazy pro svrchu naznačené případy mocnitele p. Dle mého soudu jsou jeho důkazy poněkud umělé a nejsou založeny na jednotném východisku, takže se mi nezdají býti dosti jasnými a přehlednými.

V následujícím podám přesný elementární důkaz zmíněného vzorce na základě společného východiska pro veškeré realné případy mocnitele p.

2. Budiž především p kladné a celistvé číslo.



Obr. 1.

V elementární mathematice dokazuje se vzorec *)

---

*) Viz na př. mé pojednání: „*Odvození vzorce pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady ve formě nezávislé*" v tomto Časopise pag. 191.

$$\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

pro $n = \infty$, znamená-li p kladné a celistvé číslo.

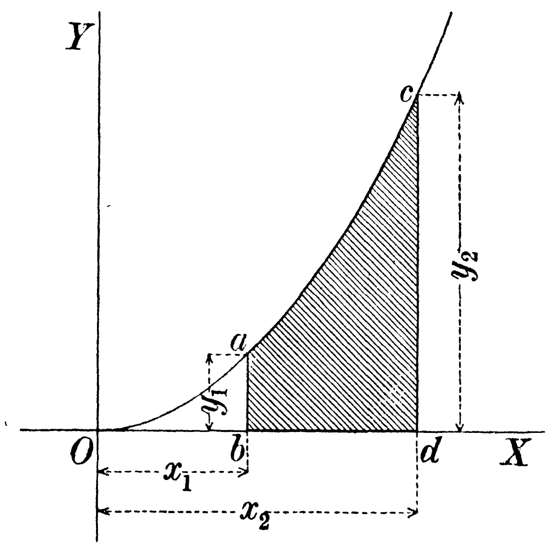
Vzhledem k obr. 1. platí pro $n = \infty$:

Plocha

$$oab = \overset{x_1}{\underset{0}{\mathrm{P}}} = \Sigma\, y\, \frac{x_1}{n} = \sum_{x=\frac{x_1}{n}}^{x=n\frac{x_1}{n}} Cx^p \frac{x_1}{n} = Cx_1^{p+1} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} k^p}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{Cx_1^{p+1}}{p+1} = \frac{x_1 y_1}{p+1}.$$

Vzhledem k obr. 2. platí na základě předešlého:



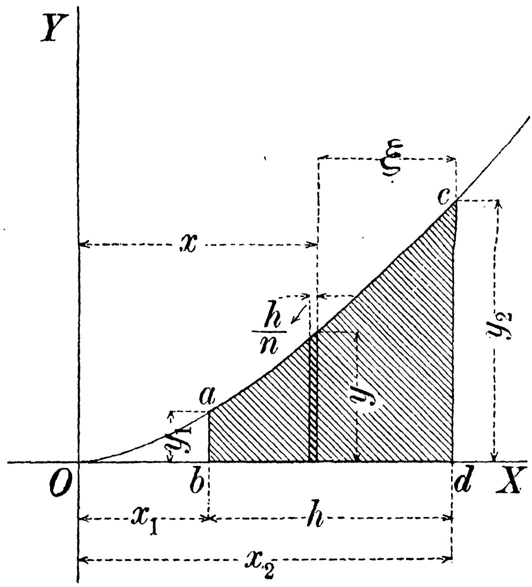
Obr. 2.

Plocha

$$abdc = \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \overset{x_2}{\underset{0}{\mathrm{P}}} - \overset{x_1}{\underset{0}{\mathrm{P}}} = \frac{Cx_2^{p+1} - Cx_1^{p+1}}{p+1} = \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{p+1}.$$

3. Budiž $p = \frac{r}{s}$ kladné lomené číslo, takže rovnice křivky

zní $$y = Cx^{\frac{r}{s}}.$$



Obr. 3.

Vzhledem k obr. 3. platí

$$x_2 - x_1 = h, \quad x = x_2 - \xi, \quad (\xi < x_2)$$

a když $n = \infty$, můžeme psáti:

Plocha

$$abdc = \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \Sigma\, y\, \frac{h}{n} = \sum_{\xi=\frac{h}{n}}^{\xi=n\frac{h}{n}} C\,(x_2 - \xi)^{\frac{r}{s}} \frac{h}{n}$$

$$= Cx_2^{\frac{r}{s}} \frac{h}{n} \sum_{\xi=\frac{h}{n}}^{\xi=n\frac{h}{n}} \left(1 - \frac{\xi}{x_2}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Poněvadž $\frac{\xi}{x_2} < 1$, můžeme na základě binomické poučky psáti:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}x_2^{\frac{r}{s}} \frac{h}{n} \sum_{\xi=\frac{h}{n}}^{\xi=n\frac{h}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{s}\right)_1 \frac{\xi}{x_2} + \left(\frac{r}{s}\right)_2 \left(\frac{\xi}{x_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{s}\right)_3 \left(\frac{\xi}{x_2}\right)^3 + \ldots \text{ in inf}\right],$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}x_2^{\frac{r}{s}} \left[h - \left(\frac{r}{s}\right)_1 \frac{h^2}{x_2} \frac{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}} k}{n^2} + \left(\frac{r}{s}\right)_2 \frac{h^3}{x_2^2} \frac{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}} k^2}{n^3} - \left(\frac{r}{s}\right)_3 \frac{h^4}{x_2^3} \frac{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}} k^3}{n^4} + \ldots \text{ in inf}\right],$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}x_2^{\frac{r}{s}} \left[h - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s}\right)_1 \frac{h^2}{x_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{s}\right)_2 \frac{h^3}{x_2^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{s}\right)_3 \frac{h^4}{x_2^3} + \ldots \text{ in inf}\right],$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{\mathrm{C}x_2^{\frac{r}{s}+1}}{\frac{r}{s}+1} \left[\left(\frac{r}{s}+1\right)_1 \frac{h}{x_2} - \left(\frac{r}{s}+1\right)_2 \left(\frac{h}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{r}{s}+1\right)_3 \left(\frac{h}{x_2}\right)^3 - \left(\frac{r}{s}+1\right)_4 \left(\frac{h}{x_2}\right)^4 + \ldots \text{ in inf}\right].$$

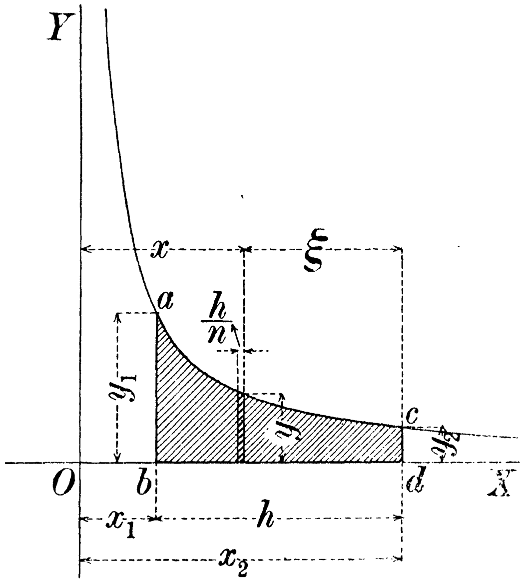
Poněvadž ale $\frac{h}{x_2} < 1$, možno poslední rovnici psáti ve formě

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{\mathrm{C}x_2^{\frac{r}{s}+1}}{\frac{r}{s}+1} \left[1 - \left(1 - \frac{h}{x_2}\right)^{\frac{r}{s}+1}\right] = \frac{\mathrm{C}}{\frac{r}{s}+1} \left[x_2^{\frac{r}{s}+1} - \left(x_2 - h\right)^{\frac{r}{s}+1}\right],$$

tedy

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{\mathrm{C}x_2^{\frac{r}{s}+1} - \mathrm{C}x_1^{\frac{r}{s}+1}}{\frac{r}{s}+1} = \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{\frac{r}{s}+1}.$$

4. Týmž způsobem lze tento vzorec odvoditi pro $p = -q$ (záporné číslo).



Obr. 4.

Křivka pak má rovnici $y = Cx^{-q}$ (obr. 4.)

$$x_2 - x_1 = h, \quad x = x_2 - \xi, \quad n = \infty.$$

Plocha

$$abdc = \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \sum_{\xi=\frac{h}{n}}^{\xi=n\frac{h}{n}} C\,(x_2 - \xi)^{-q}\,\frac{h}{n} = Cx_2^{-q}\,\frac{h}{n}\sum_{\xi=\frac{h}{n}}^{\xi=n\frac{h}{n}}\left(1 - \frac{\xi}{x_2}\right)^{-q}.$$

Ježto $\frac{\xi}{x_2} < 1$, možno psáti:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = Cx_2^{-q}\,\frac{h}{n}\sum_{\xi=\frac{h}{n}}^{\xi=n\frac{h}{n}}\left[1 - (-q)_1\,\frac{\xi}{x_2} + (-q)_2\left(\frac{\xi}{x_2}\right)^2 - (-q)_3\left(\frac{\xi}{x_2}\right)^3 + \ldots \text{in inf}\right],$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = Cx_2^{-q}\left[h-(-q)_1\frac{h^2}{x_2}\frac{\sum\limits_1^n k}{n^2}+(-q)_2\frac{h^3}{x_2^2}\frac{\sum\limits_1^n k^2}{n^3}-(-q)_3\frac{h^4}{x_2^3}\frac{\sum\limits_1^n k^3}{n^4}\right.$$
$$\left.+\dots \text{ in inf}\right],$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{Cx_2^{-q+1}}{-q+1}\left[(-q+1)_1\frac{h}{x_2}-(-q+1)_2\left(\frac{h}{x_2}\right)^2\right.$$
$$\left.+(-q+1)_3\left(\frac{h}{x_2}\right)^3-(-q+1)_4\left(\frac{h}{x_2}\right)^4+\dots \text{ in inf}\right].$$

Poněvadž $\frac{h}{x_2} < 1$, lze tuto rovnici psáti ve formě:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{Cx_2^{-q+1}}{-q+1}\left[1-\left(1-\frac{h}{x_2}\right)^{-q+1}\right]$$
$$= \frac{C}{-q+1}\left[x_2^{-q+1}-(x_2-h)^{-q+1}\right].$$
$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{Cx_2^{-q+1}-Cx_1^{-q+1}}{-q+1} = \frac{x_2y_2-x_1y_1}{-q+1}.$$

5. Pro $q = 1$, totiž pro křivku

$$y = Cx^{-1}$$

nelze posledního vzorce užiti, neboť $x_2y_2 = x_1y_1 = C$, takže

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{C-C}{-1+1} = \frac{0}{0}.$$

Dosadíme-li $q = 1$ do vzorce

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = Cx_2^{-q}\left[h-\frac{1}{2}(-q)_1\frac{h^2}{x_2}+\frac{1}{3}(-q)_2\frac{h^3}{x_2^2}-\frac{1}{4}(-q)_3\frac{h^4}{x_2^3}\right.$$
$$\left.+\dots \text{ in inf}\right],$$

obdržíme

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = C\left[\frac{h}{x_2}-\frac{1}{2}(-1)_1\left(\frac{h}{x_2}\right)^2+\frac{1}{3}(-1)_2\left(\frac{h}{x_2}\right)^3-\frac{1}{4}(-1)_3\left(\frac{h}{x_2}\right)^4\right.$$
$$\left.+\dots \text{ in inf}\right],$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = C\left[\frac{h}{x_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x_2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x_2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{h}{x_2}\right)^4+\dots \text{ in inf}\right].$$

Poněvadž ale $\frac{h}{x_2} < 1$, možno poslední rovnici psáti ve formě*)

---

*) Funkce ly jest definována rovnicí $e^{ly} = y$, při čemž číslo

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Následkem toho

$$e^{ly} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nly};$$

položíme-li $nly = \frac{1}{\omega}$, t j. $\frac{1}{n} = \omega\, ly$, jest $\lim \omega = 0$, když $\lim n = \infty$.

Platí tedy

$$e^{ly} = \lim_{\omega=0} (1 + \omega\, ly)^{\frac{1}{\omega}},$$

t. j.

$$y = \lim_{\omega=0} (1 + \omega\, ly)^{\frac{1}{\omega}},$$

z čehož plyne

$$ly = \lim_{\omega=0} \frac{y^\omega - 1}{\omega}.$$

Položíme-li $y = 1 + x$, obdržíme

$$l(1+x) = \lim_{\omega=0} \frac{(1+x)^\omega - 1}{\omega}.$$

Pro $-1 < x < +1$ platí dle binomické poučky:

$$l(1+x) = \lim_{\omega=0} \frac{1}{\omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\omega)_k x^k - 1\right],$$

t. j.

$$l(1+x) = \lim_{\omega=0} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega)_k x^k = \lim_{\omega=0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\omega - 1)_{k-1} x^k,$$

tedy

$$l(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)_{k-1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ in inf.}$$

pro $-1 < x \leq +1$,

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = -\,\mathrm{C}\,l\left[1-\frac{h}{x_2}\right] = -\,\mathrm{C}l\,\frac{x_2-h}{x_2} = -\,\mathrm{C}l\,\frac{x_1}{x_2} = \mathrm{C}l\,\frac{x_2}{x_1}.$$

t. j.

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}\,[lx_2 - lx_1]. \qquad \{lx = \log \operatorname{nat} x\}.$$

Dodatek. Kvadraturní formule (1) platí také pro případ irracionalního mocnitele p, jak z následující úvahy vyplývá.

Budiž irracionalní číslo p určeno přibližně desetinným zlomkem a sice na r míst desetinných, t. j.

$$\frac{a}{10^r} < p < \frac{a+1}{10^r}.$$

Kvadraturní formule (1) platí pro obě meze irrac. čísla p, neboť jsou to čísla lomená, při čemž možno voliti číslo r libovolně velké. Z toho patrno, že ona formule platí také pro $\lim r = \infty$, t. j. pro irrac. číslo p.

Příspěvek k methodám infinitesimálního počtu.

Napsal

Jan Pexider v Praze.

Nižší funkce transcendentní reálného i soujemného argumentu mají vesměs funkcionální rovnice, resp. hoví addičnímu theorému. Takováto základní funkce jest relace mezi funkčními hodnotami příslušnými třem argumentům, z nichž dva jsou libovolné a třetí určitou funkcí předchozích dvou. Theorému takového užiti lze k odvození derivační funkce, a sice následujícím způsobem.

---

následkem toho

$$l\,(1-x) = -\,(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \text{ in inf.})$$

pro $\qquad -1 \leqq x < +1$

a tedy

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \text{ in inf.} = -\,l\,(1-x).$$