Vladimír Václav Heinrich

Příspěvek k theorii Darwinových oscillujících satellitů. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 4, 407--425

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123046

Příspěvek k theorii Darwinových oscillujících satellitů.

Dr. **Vladimír Václav Heinrich** v Praze.

(Dokončení.)

Naše biquadratická rovnice (5) přejde ve

$$h^4 + (1 + \mu) h^2 + \frac{27}{4} \mu = 0.$$

Pokud je $(1 + \mu)^2 > 27\mu$, má rovnice kořeny reálné pro h^2 a to oba negativní, i vidno, že hyperbolické funkce našeho obecného řešení přejdou tu ve trigonometrické, a řešení je stabilní t. j. koordináty zůstávají ustavičně konečnými, pokud $\mu < \frac{1}{24}$.

Položme $E' = F' = 0$, i bude zníti rovnice uzavřené pohybové křivky:

$$\xi = G \cos \nu t + H \sin \nu t,$$
$$\eta = G' \cos \nu t + H' \sin \nu t.$$

Při tom konstanty vázány relacemi (7) jen místo $h = i\nu$

$$H, - Hi$$
$$H' - Hi$$

Eliminujme čas (násob resp. $\left\{ \begin{matrix} G'G \\ H'H \end{matrix} \right\}$ a sečti a utvoř *sin cos*), pak najdeme rovnici dráhy oscillujícího satellita L_4 (L_5) v rotujícím systému

$$(G^2 + H^2)\eta^2 + (G'^2 + H'^2)\xi^2 - 2(GG' + HH')\xi\eta$$
$$= (GH' - G'H)^2$$
$$(-h_1^2 + M)\xi^2 + (-h_1^2 + N)\eta^2 + 2Q\xi\eta$$
$$= -\frac{4n^2h_1^2}{-h_1^2 + M}(G'^2 + H'^2).$$

Je to patrně ellipsa. Transformujme ji na osy otočením o úhel Θ. Nalezneme pro h_1^2, h_2^2 dvě ellipsy, jichž vedlejší osy míří přibližně k centrálnímu tělesu (slunci).

$$\xi + i\eta = (x + iy)\, e^{-i\Theta}$$
$$\xi = x \cos \Theta + y \sin \Theta$$
$$\eta = - x \sin \Theta + y \cos \Theta$$
$$tg\, 2\Theta = \frac{2Q}{M - N} = \pm \sqrt{3}\, \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

Pro periody oběhů v ellipsách τ najdeme l. c.

$$1)\ -h_1^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 = 6{\cdot}75\mu, \quad 2)\ -h_2^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau_2}\right)^2 = 1 - 5{\cdot}75\mu,$$

vzpomeneme-li, že pro rušivou planetu platilo

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}},$$

najdeme

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\sqrt{6{\cdot}75\mu}}, \quad \tau_2 = \tau\,(1 + 3{\cdot}375\mu).$$

Všimněme si, že u ellipsy 1) bude vzhledem k malé hmotě $\mu < \frac{1}{24}$ perioda oběhu velmi veliká. Nalezneme na př. v konkretním případu Jupiter-slunce

$$\mu \doteq \frac{1}{1000} \quad \begin{array}{l} \tau_1 \doteq 12\tau = 144 \text{ let slunečních} \\ \tau_2 \doteq \quad \tau = \ 12 \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}$$

Dle toho budeme pro prvnější ellipsu očekávati, že je hodně protáhlá. Skutečně najdeme pro poměr os v našem případě

$$a^2 = 4\,(G'^2 + H'^2),\ b^2 = 12\mu\,(G'^2 + H'^2),\ \frac{b}{a} \doteq \frac{1}{18}.$$

Excentricita je téměř rovna jedné.

Přejděme nyní k diskussi podmínky $8^b)\ \frac{y}{\varrho_1\varrho_2} = 0.$

Především vidno, že $y = 0$, t. j. centra tato jsou vesměs na spojnici centrální těleso (slunce ☉) — planeta rušivá (Jupiter ♃). Zveme je proto centra syzygetická L_1, L_2, L_3 (viz obr. 3. str. 421).

Dle definice $\varrho_1\varrho_2$ (absolutní hodnoty vzdáleností od ☉, ♃) bude v bodě

$$\begin{array}{llll} L_1) & a + r_1 = \varrho_1, & a - r_2 = -\varrho_2, & \varrho_1 = 1 - \varrho_2, \\ L_2) & a + r_1 = \varrho_1, & a - r_2 = \varrho_2, & \varrho_1 = \varrho_2 + 1, \\ L_3) & a + r_1 = -\varrho_1, & a - r_2 = -\varrho_2, & \varrho_1 = \varrho_2 - 1. \end{array}$$

Dosadíme-li poslední systém do jedné z podmínečných rovnic ad (8), najdeme k určení délek ϱ, resp. rovnice pátého stupně (Lagrange-Bohlin)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}-\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2}&=0\\ \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2}&=0\\ \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2}&=0\end{aligned}\right\}\ \text{které dají pro kořeny}\quad \begin{aligned}\varrho_2&=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}+\dots\\ \varrho_2&=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}+\dots\\ \varrho_1&=1-\frac{7}{12}\mu+\dots\end{aligned}$$

Zbývá nalézti hodnoty derivací M, N, Q, i bude

$$\left\{\begin{aligned}M&=1+\mu+\frac{2}{\varrho_1^3}+\frac{2\mu}{\varrho_2^3}\\ N&=1+\mu-\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{\mu}{\varrho_2^3}\,.\\ Q&=0\end{aligned}\right.$$

S použitím těchto hodnot obdržíme z naší rovnice biquadratické (5) pro h, klademe-li pro stručnost

$$2f=\frac{1}{\varrho_1^3}+\frac{\mu}{\varrho_2^3}$$

$$h^2=-(1+\mu-f)\pm\sqrt{9f^2-4(1+\mu)f}. \qquad (5^a)$$

Lze dokázati (à conférer Plummer, Monthly Notices of the R. Astr. Soc. LXII. 1901), že ve všech třech bodech L_1, L_2, L_3 je jeden z kořenů h^2 positivní, druhý negativní. Z toho viděti, že jen dvě z hyperbolických funkcí v našem obecném řešení přejdou v trigonometrické, ostatní dvě rostou s časem do nekonečna. Jsou tedy řešení periodická v okolí L_1, L_2, L_3 obecně instabilní, což již ostatně Liouville-ovi bylo známo (Journal de Mathématiques vol. VII. 1845).

Jsou-li počáteční pohybové podmínky tak specielního rázu, že koefficienty u exponenciel vymizejí, zůstává pohyb periodickým

$$E=F=E'=F'=0.$$

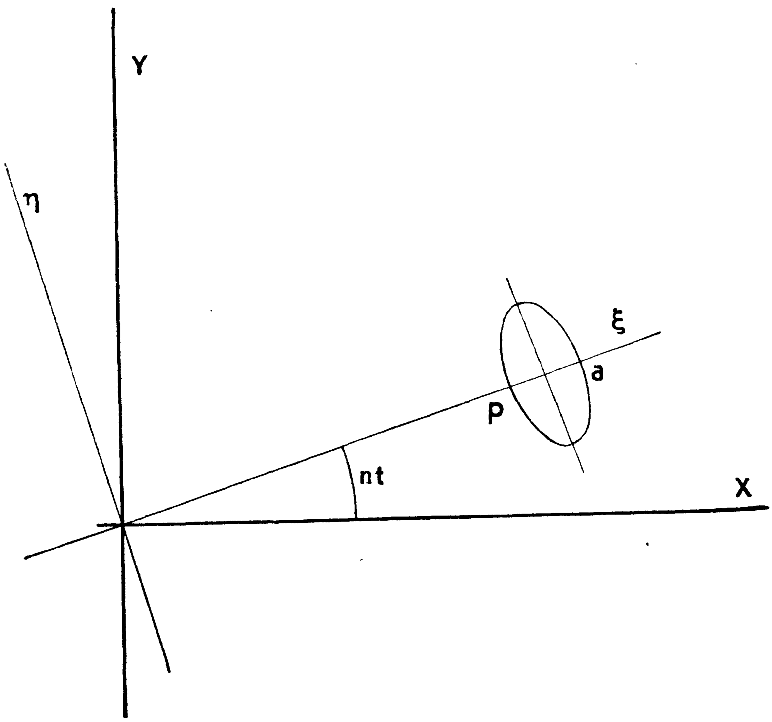
Dráha oscillujícího satellita je pak zase ellipsou s rovnicí

$$(-h_1^2+M)\,\xi^2+(-h_1^2+N)\,\eta^2=\frac{-4n^2h_1^2}{-h_1^2+M}(G'^2+H'^2),$$

jejíž rozměry i excentricitu lze snadno určiti.

2. Oscillace vynucené.

Chceme nyní abstrahovati od supposice kruhové dráhy planety rušivé předpokládajíce jistou excentricitu e. V systému rotujícím až posud slunce (těleso centrální) i Jupiter (planeta rušící) repraesentovány klidným bodem. Jinak tomu bude nyní.



Obr. 2.

Planeta rušivá opíše jistou v sebe uzavřenou křivku kolem bodu, v němž dříve pevně stála. Rozměry její budou patrně řádu excentricity. Planeta pohybující se dle Newtonova zákona attrakčního kol centrálního tělesa v ellipse nepostupuje v ní rovnoměrně. Něco rychleji v perihelu, pomaleji v aphelu. Systém rotující otáčí se rovnoměrně, a jeho pohyb skládá se s pohybem planety v zmíněné uzavřené křivce ve výslední nerovnoměrný pohyb, který v pevném systému XY jeví se jako ellipsa. I bude prvním úkolem najíti pohybovou křivku planety v systému rotujícím (viz obr. 2).

Za tím účelem nutno zjednati známé výrazy koordinat pohybu elliptického jako funkcí času (Besselovy funkce) a transformovati je do systému rovnoměrně rotujícího s rychlostí

$$n = \sqrt{1 + \mu}.$$

Nechť značí u excentrickou anomalii, a velkou poloosu, e excentricitu, pak platí známé formule pro Keplerovy pohyby v pevném systému XY

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(\cos u - e) = -\,ae + \frac{a}{2}\,\varepsilon^{iu} + \frac{a}{2}\,\varepsilon^{-iu} \\ y &= a \sin u \sqrt{1 - e^2} = \frac{a}{2i}\,(\varepsilon^{iu} - \varepsilon^{-iu}) \sqrt{1 - e^2} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Uvažme napřed rozvoje exponenciel ε jako funkcí času

$$\varepsilon^{piu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m \varepsilon^{mil} \qquad l = nt$$

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varepsilon^{piu}\, \varepsilon^{-mil}\, dl = \frac{p}{m} \int_0^{2\pi} \varepsilon^{piu}\, \varepsilon^{-mil}\, du$$

pomocí Keplerovy rovnice $u - e \sin u = l$ obdržíme

$$2\pi\, A_m = \frac{p}{m} \int_0^{2\pi} \varepsilon^{(p-m)\, iu} \varepsilon^{ime \sin u}\, du.$$

Integrál je až na faktor 2π koefficient při $\varepsilon^{(m-p)\, iu}$ v rozvoji $\varepsilon^{ime \sin u}$, tedy ex definitione Besselovy funkce (srv. na př. Gray and Mathews, Treatise of Besselian fonctions, srv. též Charlier Mech. d. Himmels I. p. 214) roven $2\pi\, I_{m-p}(me)$.

Máme tedy dle formule $\varepsilon^{ix \sin u} = \sum_m I_m(x) \varepsilon^{imu}$

$$A_m = \frac{p}{m} I_{m-p}(me).$$

Pro $m = 0$ máme však

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} \varepsilon^{piu}\, dl = \int_0^{2\pi} \varepsilon^{piu}\, (1 - e \cos u)\, du$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon^{piu} - \frac{e}{2}\, \varepsilon^{(p+1) iu} - \frac{e}{2}\, \varepsilon^{(p-1) iu}\right) du,$$

tudíž

$$A_0 = \begin{cases} 1 & \text{pro } p = 0 \\ -\frac{e}{2} & \phantom{\text{pro }} p = \pm 1 \end{cases}$$

Utvořme nyní z rovnic definujících xy (9) výraz

$$x + iy = -\frac{3ae}{2} + \frac{a}{2}(1 + \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m-1}(me)}{m} \varepsilon^{iml}$$

$$-\frac{a}{2}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m+1}(me)}{m} \varepsilon^{iml} .$$

Předpokládejme na okamžik počátek ve slunci a transformujme na rotující soustavu pomocí

$$\xi = x \cos nt + y \sin nt$$

$$\eta = - x \sin nt + y \cos nt$$

neboli

$$\xi + i\eta = (x + iy) \varepsilon^{-il}$$

$$\xi + i\eta = -\frac{3ae}{2} \varepsilon^{-int} + \frac{a}{2}(1 + \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m-1}(me)}{m} \varepsilon^{i(m-1)}$$

$$-\frac{a}{2}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m+1}(me)}{m} \varepsilon^{i(m-1)nt}.$$

Takto najdeme jednoduchým rozštěpením

$$\xi = -\frac{3ae}{2} \cos nt + \frac{a}{2}(1 + \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m-1}(me)}{m} \cos (m - 1) nt$$

$$-\frac{a}{2}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m+1}(me)}{m} \cos (m - 1) nt$$

$$\eta = \frac{3ae}{2} \sin nt + \frac{a}{2}(1 + \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m-1}(me)}{m} \sin (m - 1) nt$$

$$-\frac{a}{2}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{m+1}(me)}{m} \sin (m - 1) nt,$$

při čemž

$$I_i(me) = \frac{1}{i!}\left[\left(\frac{me}{2}\right)^i - \left(\frac{me}{2}\right)^{i+2}\frac{1}{(i+1)}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{me}{2}\right)^{i+4}\frac{1}{1.2\,(i+1)\,(i+2} + \ldots\right]$$

značí Besselův úkon prvního druhu. (V součtech vynechati sluší $m = 0$.)

Sestavíme-li termy jako dignitní a Fourierovy řady dle potencí excentricity e a násobků nt, nalezneme pro $a = 1$

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \xi_1 = 1 - e\cos nt - \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2nt) \\ &+ \frac{9e^3}{24}(\cos 3nt - \cos nt) + \ldots \\ \eta &= \eta_1 = 2e\sin nt + \frac{e^2}{4}\sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{24}(7\sin 3nt - 9\sin nt) + \ldots \end{aligned} \quad (10)$$

jakožto hledanou rovnici křivky, kterou opíše rušící planeta v rotujícím systému. Všimněme si, že je symmetrická vzhledem k ose ξ. Na obraze čís. 2. vyznačen perihel (p) a aphel (a). Počátek času položen do průchodu ♃ perihelem, neboť kladeno $l = nt$. Takto zjednané koordinaty rušivé planety vsadíme nyní do pohybových rovnic rozvinouce dle potencí excentricity. Rovnice tyto, které až posud byly lineární s koefficienty konstantními a bez druhého členu, změní se v Eulerův typ rovnic s druhým členem, který tvoří pokaždé aggregáty termů exponenciálných, resp. trigonometrických. To usnadní integraci, která by jinak jen variací konstant byla možná — a vede k určení tak zvaných vynucených kmitů (obdoba z theorie struny), při čemž i obdobu resonance vytkneme.

Vzhledem k tomu, jak sejmuty v prvním odstavci rovnice systému v jedinou, pomocí řečené Hill-Brownovy substituce, nalezneme jedinou rovnici typu Eulerova.

Volme nyní zase počátek v těžišti slunce-Jupiter, a transformujme pak koordinaty xyz,

resp. ve $\qquad x, \; y, \; z$

$$x - \frac{\mu\xi_1}{1+\mu}, \quad y - \frac{\eta_1\mu}{1+\mu}, \quad z.$$

ϱ_1 se nemění, ϱ_2 přejde ve $\varrho_2^2 = (x - r_2 - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2$, i najdeme takto systém

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} - 3e\mu \cos nt - 3e^2\mu \cos 2nt \ldots$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} - 3e^2\mu \sin 2nt \ldots$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

$$2\Omega = \frac{2}{\varrho_1} + \bar{\varrho}_1^3 + \mu\left(\bar{\varrho}_2^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right)$$

$$\varrho_1^2 = (x + r_1)^2 + y^2 + z^2$$

$$\varrho_2^2 = (x - r_2 - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2$$

$$\bar{\varrho}_1 = \varrho_1 \quad (z = 0)$$

$$\bar{\varrho}_2 = \varrho_2 \quad (z = 0).$$

Přejdeme-li zase k sousedství určitého jinak libovolného bodu x, y, 0 kladouce

$$\left\{\begin{array}{l} x = a - \varkappa + \xi \\ y = b - \lambda + \eta \\ z = \zeta \end{array}\right\},$$

nalezneme systém rovnic lineárních, ale s druhým členem (typ Euler).

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - M\xi - Q\eta = K - \varkappa M - \lambda Q - 3e\mu \cos nt + \ldots \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - Q\xi - N\eta = L - \varkappa Q - \lambda N + \ldots \end{array}\right\}. \quad (11)$$

Třetí z rovnic

$$\ddot{\zeta} = +\left(\frac{\delta^2 \Omega}{\delta z^2}\right)\zeta$$ dá jako dříve

$$\zeta = R \cos\left(t\sqrt{\frac{1}{\bar{\varrho}_1^3} + \frac{\mu}{\bar{\varrho}_2^3}} + S\right).\text{*)}$$

Zbývá rozvinouti L, K, M, N, Q, které nejsou více konstantami dle potencí ξ_1, η_1 (resp. excentricity), a obdržíme se zanedbáním druhé potence téže rovnice tvaru

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - M\xi - Q\eta = + c_1 \cos nt + c_2 \sin nt \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - Q\xi - N\eta = + c_3 \cos nt + c_4 \sin nt \end{array}\right., \quad (12)$$

*) Na str. 181. 2. čísla Časopisu v druhém řádku shora a v sedmém zdola čti týž argument co zde.

kdež $\varkappa$, λ voleno obdobně jako ve (4) viz (16).

$$K = K_0 + M_1\xi_1 + Q_1\eta_1,$$
$$L = L_0 + Q_1\xi_1 + N_1\eta_1.$$

ξ_1, η_1 definovány pomocí (10)

$$\xi = 1 + \xi_1$$
$$\eta = \eta_1$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{3(x - r_2)^2\mu}{\varrho_2^5} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} - \mu \\ Q_1 &= +\frac{3y(r_2 - x)\mu}{\varrho_2^5}. \\ N_1 &= -\frac{3y^2\mu}{\varrho_2^5} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} - \mu \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

Ze stanoviska fysikálního řekli bychom, v pravo přistupují ke dříve udaným silám potenciálu (attrak. a centrif.) ještě síly povahy periodické s periodou oběhu rušivé planety (perioda resonanční).

Je důležito připojiti ještě poznámku o tvaru rovnic (12) Jak zmíněno, omezili jsme se zatím na první stupeň excentricity. Dle známých principů o superposici partikulárních integrálů (partiálních kmitů) možno identickým způsobem přejíti k vyšším stupňům excentricity, pečujeme-li jen o to, aby v pravo rovnic (10), (11) tak zvané druhé členy byly seřazeny dle mnohonásobných argumentů knt (Fourrierovy řady). Tato okolnost ukazuje, že pro celý počet stačí jednou pro vždy rozřešiti rovnice tvaru něco obecnějšího

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - M\xi - Q\eta &= + c_1 \cos knt + c_2 \sin knt \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - Q\xi - N\eta &= + c_3 \cos knt + c_4 \sin knt \end{aligned}\right\} {}^{*)}$$

K řešení sejmeme zase obě v rovnici jedinou pomocí

$$s_1 = \xi - i\eta, \quad u_1 = \xi + i\eta.$$

$$\begin{aligned} D^2u_1 + 2n\,Du_1 &+ \frac{M+N}{2}u_1 \\ &+ \left(\frac{M-N}{2} + Qi\right)s_1 \\ &+ (c_1 + c_3 i)\cos knt + (c_2 + c_4 i)\sin knt = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

---

*) c_k obsahují vedle rozvojů K, L též rozvoje $M(\xi - \varkappa)$, ... kde za závorky jest dosaditi termy approximací dřívějších.

Položme
$$u_1 = \xi + i\eta = (A + Ci)\cos knt + (B + Di)\sin knt$$
$$s_1 = \xi - i\eta = (A - Ci)\cos knt + (B - Di)\sin knt$$
nalezneme
$$\left.\begin{array}{l} -c_1 = (k^2n^2 + M)A \qquad\qquad\qquad + QC \qquad\quad + 2n^2k\,D \\ -c_2 = \qquad\qquad + (k^2n^2 + M)B - 2n^2k\,C \quad + QD \\ -c_3 = QA \qquad\quad - 2n^2k\,B \quad + (k^2n^2 + N)\,C \\ -c_4 = 2n^2k\,A \qquad + QB \qquad\qquad\qquad + (n^2k^2 + N)\,D \end{array}\right\}.$$
Jest tedy vyčísliti determinanty
$$\begin{vmatrix} k^2n^2 + M & 0 & Q & 2n^2k \\ 0 & k^2n^2 + M & -2n^2k & Q \\ Q & -2n^2k & k^2n^2 + N & 0 \\ 2n^2k & Q & 0 & n^2k^2 + N \end{vmatrix}$$
$$= [(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (Q^2 + 4n^4k^2)]^2$$
$$\begin{vmatrix} -c_1 & 0 & Q & 2n^2k \\ -c_2 & k^2n^2 + M & -2n^2k & Q \\ -c_3 & -2n^2k & k^2n^2 + N & 0 \\ -c_4 & Q & 0 & n^2k^2 + N \end{vmatrix}$$
$$= [2n^2k\,c_4 + c_3\,Q - c_1\,(n^2k^2 + N)]\,[(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (Q^2 + 4n^4k^2)]$$
$$\begin{vmatrix} k^2n^2 + M & -c_1 & Q & 2n^2k \\ 0 & -c_2 & -2n^2k & Q \\ Q & -c_3 & k^2n^2 + N & 0 \\ 2n^2k & -c_4 & 0 & n^2k^2 + N \end{vmatrix}$$
$$= [Qc_4 - 2n^2k\,c_3 - c_2\,(n^2k^2 + N)]\,[(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (Q^2 + 4n^4k^2)]$$
$$\begin{vmatrix} k^2n^2 + M & 0 & -c_1 & 2n^2k \\ 0 & k^2n^2 + M & -c_2 & Q \\ Q & -2n^2k & -c_3 & 0 \\ 2n^2k & 0 & -c_4 & n^2k^2 + N \end{vmatrix}$$
$$= [Qc_1 - 2n^2k\,c_2 - (n^2k^2 + M\,c_3)]\,[(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (Q^2 + 4n^4k^2)]$$
$$\begin{vmatrix} k^2n^2 + M & 0 & Q & -c_1 \\ 0 & k^2n^2 + M & -2n^2k & -c_2 \\ Q & -2n^2k & k^2n^2 + N & -c_3 \\ 2n^2k & Q & 0 & -c_4 \end{vmatrix}$$
$$= [2n^2k\,c_1 + Qc_2 - c_4\,(n^2k^2 + M)]\,[(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (Q^2 + 4n^4k^2)],$$

tím nalezneme

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{2n^2kc_4 + c_3Q - (n^2k^2 + N)c_1}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (4n^4k^2 + Q^2)} \\
B &= \frac{Qc_4 - 2n^2kc_3 - c_2(n^2k^2 + N)}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (4n^4k^2 + Q^2)} \\
C &= \frac{Qc_1 - 2n^2kc_2 - (n^2k^2 + M)c_3}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (4n^4k^2 + Q^2)} \\
D &= \frac{2n^2kc_1 + Qc_2 - (n^2k^2 + M)c_4}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - (4n^4k^2 + Q^2)}
\end{aligned}\right\} . \tag{15}$$

Specielně v centrech libračních syzygetických L_1, L_2, L_3 platí dle odstavce prvního $Q = 0$, bude tedy

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2n^2kc_4 - c_1(n^2k^2 + N)}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - 4n^4k^2} \\
B &= -\frac{2n^2kc_3 + (n^2k^2 + N)c_2}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - 4n^4k^2} . \\
C &= -\frac{2n^2kc^2 + c_3(n^2k^2 + M)}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - 4n^4k^2} \\
D &= \frac{2n^2kc_1 - c_4(n^2k^2 + M)}{(n^2k^2 + M)(n^2k^2 + N) - 4n^4k^2}
\end{aligned} \tag{15a}$$

I zní celkové řešení pohybových rovnic v obecném případu

$$\begin{aligned}
x &= a - \varkappa + G \cos hyp\, h_1t + H \sin hyp\, h_1t + E \cos hyp\, h_2t \\
&\quad + F \sin hyp\, h_2t + \sum_1^\infty A \cos knt + \sum_1^\infty B \sin knt \\
y &= b - \lambda + G' \cos hyp\, h_1t + H' \sin hyp\, h_1t + E' \cos hyp\, h_2t \\
&\quad + F' \sin hyp\, h_2t + \sum_1^\infty C \cos knt + \sum_1^\infty D \sin knt
\end{aligned} \tag{16}$$

$$z = R \cos\left(t \sqrt{\frac{1}{\varrho_1^{-3}} + \frac{\mu}{\varrho_2^{-3}}} + S \right).$$

Při tom je:

$$\varkappa = \frac{L_0Q - K_0N}{Q^2 - MN}$$

$$\lambda = \frac{K_0Q - L_0M}{Q^2 - MN}.$$

Zároveň poznamenáváme, že berou-li se v úvahu *vyšší* potence excentricity než druhého stupně, jsou pak funkce M, Q, N, K_0, L_0, h_1, h_2, které intervenují v rovnicích (5) (15) (16), o termy zmíněného řádu (μe^2) od oněch pro kmity volné (6) odchylnými tvar řešení zůstane identický.

Excentricitou dráhy rušivé planety vynucené kmity jeví se tedy obecně jako termy ryze trigonometrické periody oběhu planety. Naskýtá se otázka, kdy může vzniknouti působení takové, že termy perturbační obsahují čas mimo funkce trigonometrické. Stane se to — jak z theorie lineárních differenciálních rovnic známo — tehdy, je-li koefficient ikn, $n = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{1+\mu}$ u argumentu t hyperbolických funkcí pravých stran druhého členu (rovnice 14) kořenem rovnice charakteristické (5) (resonance).

Má-li tedy naše biquadratická rovnice (5) kořen ikn. Budeme dále v specielních případech vyšetřovati, kdy je to možné. — Jinak lze též říci, resonance nastane, vymizí-li jmenovatel našich koefficientů A, B, C, D. Pak jsou amplitudy oscillací nekonečně veliké. Pak nutno klásti za partikulární integrál ne již

$$(A + Ci) \cos knt + (B + Di) \sin knt,$$

nýbrž

$$t\,(A + Ci) \cos knt + t\,(B + Di) \sin knt.$$

V tom případu porušuje vliv excentricity planety rušící stabilitu, an rostou koordinaty s časem do nekonečna. V astronomii zoveme termy tohoto tvaru smíšeně saeculární.

Vyšetřujme nyní, může-li nastati zmíněná instabilita resonanční. Především najdeme pro body L_1, L_2, L_3, že dle našich výrazů pro h^2 (5^a) nemůže nastati instabilita pro malá μ, která nás hlavně interessují. Za to př. pro L_2, $\mu \doteq \frac{3}{8}$. V bodech $L_4 L_5$ bylo nalezeno

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\sqrt{6{\cdot}75\mu}}.$$

Jak patrno, je perioda τ_1 nekonečně dlouhá pro $\mu = 0$, to odpovídá tomu, že dle našeho výrazu pro osy jedna osa protáhlé ellipsy roste do nekonečna $\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{3\mu}$. Pro $\mu = 0$ redukuje se však celý problém na pohyby dvou těles (nerušené, Keplerovy). I praví naše analysa asi tolik, že počáteční podmínky pohybu jsou takové, jaké odpovídají pohybům Keplerovým. Instabilita resonanční v případě periody τ není možná.

Pro τ_2 nalezeno v bodech L_4, L_5, $\tau_2 = \tau\,(1 + 3{\cdot}375\mu)$, takže pro $\mu = 0$ je

$$\tau_2 = \tau, \quad \frac{2\pi}{\tau_2} = \nu_2 = \frac{2\pi}{\tau} = n.$$

Zdálo by se tedy, že nastává následkem resonance instabilita. Ale není tomu tak vzhledem k tomu, že jedná se o svrchu zmíněnou singularitu $\mu = 0$. Skutečně zůstávají A, B, C, D konečnými.

Shledáváme tedy, že v bodech rovnovážných instabilita následkem resonance je vyloučena (pro velmi malá μ).

V obecném případě dány body resonanční instability velmi složitou křivkou o rovnici

$$f(xy) \equiv (n^2k^2 + M)\,(n^2k^2 + N) - (4n^4k^2 + Q^2) = 0.$$

Při tom jsou M, N, Q dány pomocí rovnic (1). Křivka jest jmenovatel amplitud vynucených kmitů (15), jinak řečeno, je to charakteristická rovnice (5), klademe-li v ní $h = ikn$.

Připomínáme ještě, že při odvození vzorců (16) nikde nebylo rozvinováno dle potencí hmoty, takže výrazy odvozené platí i pro μ libovolně veliké, resp. $= 1$ $\left(\text{Darwin l. c. } \mu = \frac{1}{10}\right)$.

Naše obecné vzorce nutno pak dle případů specialisovati. Všimněme si zvláště následující okolnosti. Ježto v pravo differenciální rovnice (3), (14) přistupující rušivé síly periodické povahy (druhý člen) jsou násobeny hmotou, bude obecně jich vliv na výsledek integrace takový, že vynucené kmity budou řádu hmoty, tedy resp. celkem malé. Skutečně obsahují koefficienty čítatele, které jsou lineárními formami c_k, jež samy μ jako faktor obsahují.

Tedy A, B, C, D jako funkce argumentu μ mají nullový bod prvého řádu $\mu = 0$. Po oddělení faktoru μ zbývají obecně holomorfní funkce téhož argumentu v okolí uvažovaném. Ale vhodnou volbou parametrů ostatních, od nichž tyto funkce visí, stanou se zmíněné funkce meromorfními, vykazujíce př. pól prvního řádu $\mu = 0$.

Snadno najdeme, že tomu tak právě v bodech L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, které po této stránce singulárními se jeví. Ježto pak zkrátí se μ v čitateli i jmenovateli, přestávají býti vynucené kmity řádu hmoty a stanou se velmi značnými, řádu excentricity, což i jinak v posledním odstavci odvodíme.

3. Specialisace. Závěr.

Bychom nyní přešli k specialisacím, uvažme napřed vrcholy rovnostranných trojúhelníků L_5 (horní znam.), L_4. Zde máme

$$M = \frac{3}{4}(1+\mu), \quad N = \frac{9}{4}(1+\mu), \quad Q = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-\mu).$$

Dosazením do našich vzorců (15) najdeme především, že hmota se krátí a že (horní znamení vždy pro L_5)

$$A = -\frac{1}{2}e, \quad B = \mp\sqrt{3}\,e, \quad C = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}e, \quad D = e$$

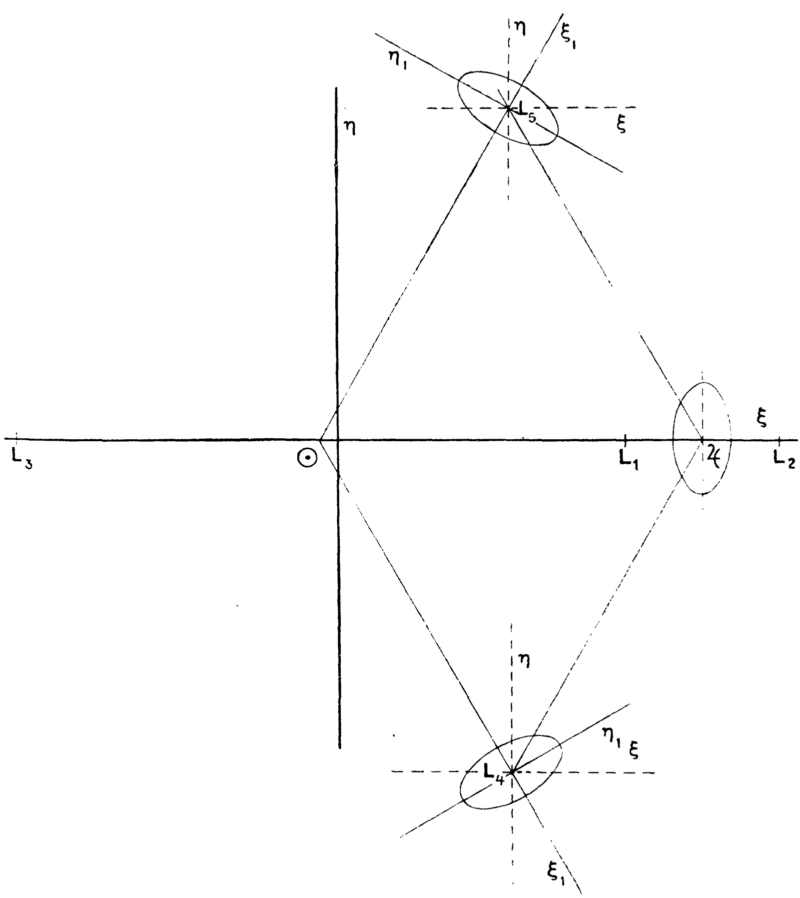
$$c_1 = -\frac{9}{4}e\mu, \; c_2 = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}e\mu, \; c_3 = \mp\frac{3\sqrt{3}}{4}e\mu, \; c_4 = -\frac{9}{2}\mu e$$

Vzorce (16) dávají pak pro vynucené kmity:

$$\begin{aligned} x &= \ldots - \frac{e\cos nt}{2} \mp \sqrt{3}\,e\sin nt \\ y &= \ldots \mp \frac{\sqrt{3}}{2}e\cos nt + e\sin nt \end{aligned} \tag{17}$$

Prve nežli vzorce zkusíme prakticky, odvodíme výsledek ještě jednou, cestou geometrickou. Za tím účelem dokážeme jednoduše — způsobem odpovídajícím našemu úkolu — jistou větu, jinou cestou odvozenou již Lagrangem (voir Laplace Méc. cél. IV., Lagrange Oeuvres VI. p. 320., Tisserand I. p. 181.):

Jmenujme koordinaty Jupitera (rušivé planety) vzhledem k bodu (1, 0) ξ_1, η_1. Při tom předpokládejme — jako až posud — rotující systém Hillův definovaný v prvním odstavci. Počátek budiž na okamžik v slunci (tělese centrálním). Hledejme koordinaty bodu, který tvoří se sluncem a Jupiterem (v ellipse) ustavičně rovnostranný trojúhelník.



Obr. 3.

Tvrdíme, že geometrické místo těchto bodů bude ellipsa shodná s ellipsou Jupiterovou (systém rotující, uzavřená křivka) jen o 60^0 přitočená a mířící k slunci (viz obr. 3.). Skutečně najdeme transformací souřadnic, zveme-li koordinaty hledaného bodu

$$\frac{1}{2} + \xi, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta,$$

$$\xi = \frac{\xi_1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_1$$

$$\eta = \pm \xi_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\eta_1}{2}$$

$$(1 + \xi_1)^2 + \eta_1^2 = \left(\frac{1}{2} + \xi - 1 - \xi_1\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta - \eta_1\right)^2$$
$$= (1 + \xi_1)^2 + \eta_1^2. \ q. e. d.$$

Navážeme-li nyní naše variace ξ, η ne již na klidné centrum L_5, L_4, nýbrž na nalezené centrum pohyblivé (v ellipse), najdeme skutečně tytéž vzorce pro vynucené kmity. Napíšeme dokonce ihned výsledek přesněji až na IV. potenci excentricity exklusive se zanedbáním veličiny ξe:

$$x = \ldots - \frac{e}{2} \cos nt \mp \sqrt{3}\, e \sin nt - e^2 \frac{1 - \cos 2\,nt}{4}$$
$$\mp \frac{e^2 \sqrt{3}}{8} \sin 2nt$$
$$- \frac{9}{48} e^3 (\cos nt - \cos 3\,nt) \mp \frac{\sqrt{3}}{48} e^3 (7 \sin 3nt - 9 \sin nt)$$

$$y = \ldots \mp \frac{\sqrt{3}}{2} e \cos nt + e \sin nt \mp \frac{e^2 \sqrt{3}}{4} (1 - \cos 2nt) \tag{18}$$
$$+ \frac{e^2}{8} \sin 2nt \mp \frac{9\sqrt{3}}{24} e^3 (\cos nt - \cos 3nt)$$
$$+ \frac{e^3}{48} (7 \sin 3nt - 9 \sin nt).$$

Obdobným způsobem bylo by lze postupovati u ostatních center Lagrangeových, neboť i zde existují obecná řešení kuželosečková tří těles na přímce (general straight line solutions).

Obě tělesa, hmota nullová (v bodě L_1, L_2, L_3) i rušící, opisují ellipsy kolem slunce, ale tak, že ustavičně zůstávají na přímce a proporce radiů vektorů zachovávají touž hodnotu (srv.

Euler, Considérations sur le problème de determiner les mouvements de trois corps qui s'attirent mutuellement, Berlin, Histoire de l'académie des sciences 1763, T. XIX).

Obdržíme tu po snadné úvaze se zanedbáním veličiny ξe tyto hodnoty vynucených kmitů:

V bodě L_1

$$x = \ldots\left[1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\ldots\right]\left\{-e\cos nt - \frac{e^2}{2}(1-\cos 2nt) + \frac{9e^3}{24}(\cos 3nt - \cos nt) + \ldots\right\}$$

$$y = \ldots\left[1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\ldots\right]\left\{2e\sin nt + \frac{e^2}{4}\sin 2nt + \frac{e^3}{24}(7\sin 3nt - 9\sin nt\ldots\right\}$$

v bodě L_2 (19)

$$x = \ldots\left(1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\ldots\right)\left\{-e\cos nt - e^2\sin^2 nt\ldots\right\}$$

$$y = \ldots\left(1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\ldots\right)\left\{2e\sin nt + \frac{e^2}{4}\sin 2nt\ldots\right\}$$

Konečně pro bod L_3 bude:

$$x = \ldots - \left(1 - \frac{7}{12}\mu\ldots\right)\left\{-e\cos nt - e^2\sin^2 nt\ldots\right\}$$

$$y = \ldots - \left(1 - \frac{7}{12}\mu\ldots\right)\left\{2e\sin nt + \frac{e^2}{4}\sin 2nt\ldots\right\}$$

Srovnáme-li oba výsledky (16), (17), (18), (19), shledáme:

Předpokladem excentricity dráhy rušivé planety mizí smysl pevného libračního centra (L), a zbývá jediné (existující) centrum pohyblivé, volné oscillace satellitů v jeho okolí jsou tytéž jako v okolí centra pevného.

Pohyblivé centrum jakoby strhuje s sebou nejbližší okolí roviny.

Přímý důkaz věty obdržíme buď dosazením (18), (19) do rovnic differenciálních (11), neb ještě kratčeji, určíme-li, vycházejíce z daného bodu roviny integrační konstanty rovnic (16), (17), (18), (19).

Proti tomu v případě obecném nutno užiti vzorců (15), (16). resp. naznačeným způsobem (odstavec 2. pag. 415.) přejíti k dalším partikulárním řešením vyšších stupňů excentricity. Při tom nejvýhodněji seřaditi vždy členy dle mnohonásobných argumentů knt, a pak celý počet ušetřen redukuje se vždy jen na dosazení do schematu vzorců (15), (16).

Přejděme nyní k řádovému ocenění formulí zjednaných. Představme si konkretní případ: meteorit neb malou planetu v okolí $L_4 L_5$ systému slunce-Jupiter. Zde je $\mu = 10^{-3}$, $e = 0{\cdot}04$. Distance ☉♃ obnáší 778,10^6 *km* $\doteq$ 8.10^8 *km*.

Pořiďme si napřed tabulku

		hodnoty zanedbané			
ξ		e^4	ξ^2	ξe	μe
$10^{-3} =$	800000 *km*	0·000003	10^{-6}	$2^{-1}\ 10^{-4}$	10^{-6}
$10^{-4} =$	80000 „		10^{-8}	$2^{-1}\ 10^{-5}$	10^{-7}
$10^{-5} =$	8000 „		10^{-10}	$2^{-1}\ 10^{-6}$	10^{-8}
$10^{-6} =$	800 „		10^{-12}	$2^{-1}\ 10^{-7}$	10^{-9}
$10^{-7} =$	80 „		10^{-14}	$2^{-1}\ 10^{-8}$	10^{-10}
$10^{-8} =$	8 „		10^{-16}	$2^{-1}\ 10^{-9}$	10^{-11}

Uvažme, že pětimístný kalkul na obloukovou sekundu přesný odpovídá asi přesnosti mikrometrických měření těliska pozorovaného (resp. fotografovaného). Dle tabulky najdeme, že theorie vzorců (18) bude odpovídati dotud přesně měřením, dokud bude $\xi <$ 800.000 *km*, což je obor velmi široký — asi dvakrát vzdálenost země-měsíc. Při tom jen kmity neměřitelné mikrometrem zanedbány. Vidíme též dle vzorce (18), že kmity vynucené excentricitou dráhy Jupiterovy nejsou nikterak malé, jsouce, jak zmíněno, řádu excentricity, t. j. asi 32,000.000 *km*.

Užije-li se jen vzorců (17) až na e^2 správných, možno čekati jen přesnost měření v obloukových minutách. — Ostatně poučuje tabulka ještě o něčem jiném:

Položme $\xi = 0$, t. j. přibližme se k pohyblivému centru L_4, L_5. Pak existují jediné kmity vynucené. Vzdalujeme-li se od centra, přistupují k nim kmity volné, zprvu daleko nepatrnější amplitudy nežli ony vynucené, až ve vzdálenosti asi 32,000.000 *km* dosáhnou téže řádové velikosti.

Aby náš názor o pohybech těliska v okolí L_4, L_5 uvažovaného konkretního systému slunce-Jupiter byl úplný, představme si, že tělisko není přesně v rovině dráhy Jupiterovy a přitom blízko pohyblivého bodu L_4 neb L_5 v mezích udaných svrchu $\xi < 800.000$ *km*. Jaké oscillace pak vykonává?

Předem oscillace volné s amplitudou < 800.000 *km* a periodou dle počátečních pohybových podmínek buď $\tau_1 = 144$ let slunečních, neb $\tau_2 = 12$ let, neb obojí. Dále oscillace vynucené s amplitudou řádu excentricity dráhy Jupiterovy, t. j. asi 32,000.000 *km* a periodou oběhu Jupiterova 12 let.

Oboje oscillace dějí se v rovině $\xi\eta$. Ale dle p. 180., 414. skládají se v pohyb šroubový a to tak, že celá rovina $\xi\eta$ kývá kolem roviny dráhy Jupiterovy podél osy Z nahoru a dolů s periodou oběhu Jupiterova

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{+\frac{1}{\varrho_1^{3}}+\frac{\mu}{\varrho_2^{3}}}}$$

12 let.

Na konec uvažme ještě případ meteoritu v blízkosti centra L_2 systému země-slunce (Gegenschein). Zde platí zase naše formule (15[a]) (16) dříve odvozené, jichž další specialisaci přenecháváme čtenáři. Jako výsledek vyjdou formule (19). Vzhledem k tomu, že je $e = 0{\cdot}006$, lze se spokojiti s první potencí excentricity, $\mu \doteq 3^{-1}\,10^{-5}$. Pokud se týká platnosti vzorců, shledáme snadno, že sahá při přesnosti měření na $1''$ as na vzdálenost $15.\ 10^7/10^3 = 15\ .\ 10^4$ *km* od centra. Amplituda vynucených kmitů je zde asi 900.000 *km*.

Pojem rychlosti v nové mechanice.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Myšlenka, že rychlost světla jest nepřekročitelnou hranicí pro všechny rychlosti hmot kol nás, jest ve sporu s názory klassické mechaniky. Existuje dokonce — dnes zapomenutý — důkaz, že pojem největší rychlosti obsahuje logický spor. Důkaz ten