Václav Láska

Integrál Poissona jako přímý důsledek integrálu Cauchyho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 4, 398--401

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123042

klademe-li $E = 1$. Z druhé rovnice jde

$$\sqrt{G} = V_1 + uV = V\left(\frac{V_1}{V} + u\right),$$

kde V, V_1 jsou funkce argumentu v. Zavedeme-li místo $-\frac{V_1}{V}$ novou proměnnou a označíme krátce v, obdržíme

$$G = V^2 (u - v)^2.$$

Třetí rovnice dává pak, značí-li V_2 funkci argumentu v

$$D'' = V_2 (u - v).$$

Obdržíme tudíž charakteristický tvar lin. elementu ploch rozvinutelných

$$ds^2 = du^2 + V_2^2 (u - v)^2 dv^2.$$

Rovnice čar charakteristických redukuje se na

$$dv^2 = 0,$$

t. j. $v = konst$, kteroužto rovnicí jsou dány i čáry assymptotické.

Jsou tudíž plochy s čarami charakteristickými nulové geodetické křivosti plochy rotační uvedených tvarů a plochy rozvinutelné.

Integrál Poissona jako přímý důsledek integrálu Cauchyho.

Píše V. Láska.

Integrál *Poissona* lze, jak známo, odvoditi z integrálu *Cauchyho* buď pomocí integrálu *Hadamarda* (viz n. p. *Kowalewski*, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen § 52. a § 53.) aneb na základě funkce *Greena* (viz *Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie I., str. 633). V tomto pojednání hodlám dokázati, že lze i přímou cestou dospěti k cíli.

Budiž $f(z)$ analytická funkce v kruhu K o poloměru R, vyjímaje pól z. Dle známé věty Cauchyho jest

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1}$$

Uvážíme-li ale, že platí identita

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{\partial}{\partial z} \log (\zeta - z)$$

a položíme-li

$$\zeta - z = \varrho e^{i\vartheta},$$

bude

$$\log (\zeta - z) = \log \varrho + i\vartheta$$

a v důsledku toho

$$-\frac{\partial}{\partial z} \log (\zeta - z) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} + i \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

Vložením této relace do (1) obdržíme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_k f(\zeta) \frac{d\varrho}{\varrho} + i \int_k f(\zeta)\, d\vartheta \right\}. \tag{2}$$

Uvažujme dále jen reálný obor integrálu (2) a položme

$$\zeta = Re^{i\psi}, \qquad z = re^{i\varphi}$$

$$\varrho = \sqrt{R^2 - 2Rr \cos (\psi - \varphi) + r^2}.$$

Derivováním poslední rovnice obdržíme

$$\frac{\partial \varrho}{\varrho} = \frac{2Rr \sin (\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos (\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi. \tag{3}$$

Otočme nyní trojúhelník $oz\zeta$ (viz obrazec) a úhel $d\psi$ a označme plochu v obrazci vyčárkovanou písmenou P.

Poněvadž

$$\Delta\, oz\zeta = \Delta\, oz'\zeta',$$

bude i

$$P + \tfrac{1}{2} R^2 d\psi - \tfrac{1}{2} r^2 d\psi = P + \tfrac{1}{2} \varrho^2 d\vartheta$$

aneb

$$(R^2 - r^2)\, d\psi = \varrho^2 d\vartheta.$$

Rovnici tu lze psáti, jak následuje

$$d\vartheta = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos (\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi. \tag{4}$$

Vložíme-li (3) a (4) do (2) kladouce zároveň

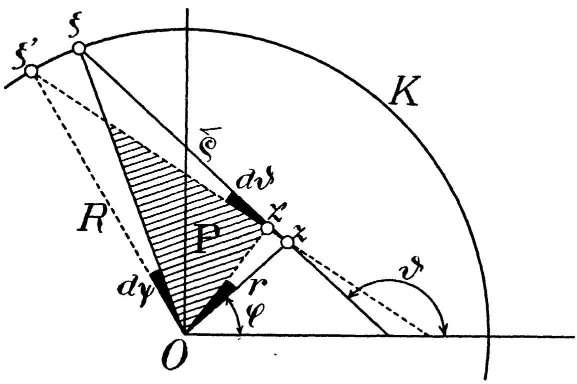
$$f = u + iv,$$

obdržíme rozdělením reálných hodnot od imaginárních

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi \quad (5)$$

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R, \psi) \frac{2Rr\sin(\varphi - \psi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, d\psi. \quad (6)$$

Zde nutno ještě vyšetřiti, jak zachovají se oba integrály oproti addičním stálým.



Přidáme-li k funkci u stálou a a podobně k funkci v stálou b, nemění se s ohledem na to, že

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Rr\sin(\varphi - \psi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, d\psi = 1$$

integrál (5). Za to integrál (6) přejde v

$$v(r, \varphi) =$$

$$-b + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Rr\sin(\varphi - \psi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, v(R, \psi)\, d\psi \quad (7)$$

Nahraďme nyní kružnici libovolnou křivkou C. V trojúhelníku $z\xi\xi'$ platí věta

$$\varrho : ds = sin\,(\vartheta - \psi) : sin\,d\psi.$$

Dále přesvědčíme se snadno, že

$$sin\,(\vartheta - \psi) = -\frac{\partial \varrho}{\partial n},$$

tak že obdržíme

$$d\vartheta = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial n}\,ds = \frac{\partial\, log\, \frac{1}{\varrho}}{\partial n}\,ds.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do integrálu

$$v\,(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_C v\,(R, \psi)\,d\vartheta,$$

zamění se týž na

$$v\,(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_C v\,(R, \psi)\,\frac{\partial\, log\, \frac{1}{\varrho}}{\partial n}\,ds, \tag{8}$$

čímž opět vedeni jsme k funkci *Greena*.

Deskriptivně geometrické řešení problému normál kuželoseček.

Napsal **Josef Klíma**, assistent české techniky.

(Dokončení.)

Hyperbola.

Budiž dána nevyrýsovaná hyperbola (obr. 4.) o hlavní ose $\overline{a^1a} = 2a$, ohniska jsou f a g, $\overline{fg} = 2e$, vedlejší poloosa označena b.

Hyperbolou nemožno proložiti rotační válec, i proložme jí kužel rotační o vrcholu s $(\overline{ss_1} \perp \overline{a^1a}$, s_1 střed dané hyperboly