Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Odvození některých vzorců z počtu integrálního

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 5, 218--231

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123024`

Odvození některých vzorců z počtu integralního.

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

O integrálu

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}\, dz}{1 - ze^{i\varphi}}, \tag{1}$$

v němž a značí komplexní veličinu mající za realnou část kladný pravý zlomek ($a = \alpha + i\beta$; $0 < \alpha < 1$), dokážeme, že nezávisí na realné veličině φ, pokud tato se nachází *uvnitř* intervallu $(0 \ldots 2\pi)$.

Pišme za příčinou snazšího přehledu

$$f(\varphi, z) = \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}}{1 - ze^{\varphi i}},$$

$$f'(\varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = ie^{ai\varphi} z^{a-1} \left(\frac{a}{1 - ze^{i\varphi}} - \frac{ze^{i\varphi}}{(1 - ze^{i\varphi})^2} \right),$$

a pokusme se odůvodniti, dle známého pravidla o differencování integrálů omezených, že výraz

$$K = \int_0^\infty f'(\varphi, z)\, dz$$

rovná se derivaci $\dfrac{dJ}{d\varphi}$.

Jelikož tu jednak meze integrační nejsou obě konečny, a jednak funkce $f'(\varphi, z)$ není vždy konečnou, vyžaduje přesnost, abychom tuto věc dokázali přímo. Vzorec $\dfrac{dJ}{d\varphi} = K$ bude správným, když dokážeme vzorec $\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K\, d\varphi = J_1 - J_0$, kde φ_0, φ_1 jsou zcela libovolné veličiny obsažené uvnitř mezery $(0 \ldots 2\pi)$, J_0, J_1 jim příslušné hodnoty integrálu J. Neboť ze vzorce posledního plyne naopak $\dfrac{dJ_1}{d\varphi_1} = K_1$.

Za tím účelem pišme

$$K = K(\delta, N) + D(\delta, N),$$

kde

$$K(\delta, N) = \int_\delta^N f'(\varphi, z)\, dz,$$

$$D(\delta, N) = \int_0^\delta f'(\varphi, z)\, dz + \int_N^\infty f'(\varphi, z)\, dz,$$

a při tom δ, N značí dvě veličiny kladné, prvá malou, druhá velikou. Jelikož tu v oboru $\varphi = (\varphi_0 \ldots. \varphi_1)$, $z = (\delta \ldots. N)$ jsou funkce f, f' stejnoměrně spojity vůči oběma literám φ, z, máme skutečně

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K(\delta, N)\, d\varphi = \int_\delta^N [(f(\varphi_1, z) - f(\varphi_0, z)]\, dz.$$

O veličině D (δ, N) je pak patrno, že bude její absolutní hodnota menší než

$$e^{-\beta\varphi} \int_0^\delta \left[\frac{|a|}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2}\right] z^{\alpha-1}\, dz$$

$$+ e^{-\beta\varphi} \int_N^\infty \left[\frac{|a|}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}\right] z^{\alpha-1}\, dz = e^{-\beta\varphi}\varepsilon,$$

kde ε má význam patrný, a že tedy bude

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} D(\delta, N)\, d\varphi = \varrho\varepsilon\,(\varphi_1 - \varphi_0)\, e^{-\beta\varphi'},$$

kde φ' jest obsaženo mezi φ_0 a φ_1, a ϱ značí komplexní veličinu menší než 1. Máme tedy

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K\, d\varphi = \int_\delta^N [f(\varphi_1, z) - f(\varphi_0, z)]\, dz + \varrho\varepsilon\,(\varphi_1 - \varphi_0)\, e^{-\beta\varphi'};$$

přejdeme-li k limitě pro $\delta = 0$, $N = \infty$, bude lim $\varepsilon = 0$, kdežto $\varrho e^{-\beta\varphi'}$ bude konečné; tedy obdržíme skutečně

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{K}\, d\varphi = \int_0^\infty [f(\varphi_1, z) - f(\varphi_0, z)]\, dz = \mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_0,$$

což bylo dokázati.

Máme tedy vzorec

$$\frac{d\mathrm{J}}{d\varphi} = \int_0^\infty f'(\varphi, z)\, dz,$$

a poněvadž

$$f'(\varphi, z)\, dz = ie^{ai\varphi}\, d\, \frac{z^a}{1 - ze^{i\varphi}},$$

plyne odtud

$$\frac{d\mathrm{J}}{d\varphi} = 0,$$

poněvadž funkce $\frac{z^a}{1 - ze^{i\varphi}}$ mizí pro $z = 0, \infty$. Z rovnice této ale plyne, že J má v intervallu $\varphi = (0 \ldots . 2\pi)$ hodnotu stálou, která bude záviseti pouze na a.

Klademe-li $\varphi = \pi$, obdržíme

(2) $$\mathrm{J} = e^{ai\pi} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{1 + x};$$

nás ale zajímá výsledek, k němuž dospějeme ve vzorci (1) přechodem k limitě pro $\varphi = 0$. Za tím účelem rozložme integrál (1) ve dva v mezích $(0, 1)$, $(1, \infty)$ a klaďme v druhém $z = \frac{1}{x}$; tím obdržíme vzorec

(1^a) $$\mathrm{J} = e^{ai\varphi} \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1 - xe^{i\varphi}} - \frac{e^{-i\varphi}\, x^{-a}}{1 - xe^{-i\varphi}} \right) dx$$

aneb

(2^b) $$\mathrm{J} = e^{ai\varphi} \int_0^1 \frac{(x^{a-1} + x^{1-a}) - (x^a + x^{-a})\, e^{-i\varphi}}{1 - 2x \cos \varphi + x^2}\, dx.$$

Buď r kladná veličina menší než 1; pak bude při označen

$$J_r = e^{ai\varphi} \int_0^r \frac{(x^{a-1} + x^{1-a}) - (x^a + x^{-a})\, e^{i\varphi}}{1 - 2x \cos \varphi + x^2}\, dx\,.$$

patrně

$$\lim_{\varphi=0} J_r = \int_0^r \frac{x^{a-1} + x^{1-a} - (x^a + x^{-a})}{(1-x)^2}\, dx\,,$$

a jedná se tedy pouze o výraz

$$e^{-ai\varphi}(J - J_r) = \int_r^1 \frac{(x^{a-1} + x^{1-a}) - e^{-i\varphi}(x^a + x^{-a})}{1 - 2x \cos \varphi + x^2}\, dx\,,$$

resp. o jeho limitu pro $\varphi = 0$. Pišme $\cos \varphi = 1 - \varepsilon'$; pak zní realná část pravé strany *při realném a*:

$$\int_r^1 \frac{(x^{a-1} - x^{-a})(1-x) + \varepsilon'(x^a + x^{-a})}{(1-x)^2 + 2x\varepsilon'}\, dx$$

$$= (1-r)\frac{(\xi^{a-1} - \xi^{-a})(1-\xi) + \varepsilon'(\xi^a + \xi^{-a})}{(1-\xi)^2 + 2\varepsilon'\xi}\,,$$

kde ξ jest určitá veličina mezery $(r \ldots . 1)$.

Funkce

$$\frac{x^{a-1} - 1}{1-x}\,,\quad \frac{x^{-a} - 1}{1-x}\,,\quad \frac{x^a + x^{-a}}{2x}$$

jsou konečny a spojity v mezeře $(\frac{1}{2} \ldots . 1)$, a tedy jsou menší než jistá veličina M nezávislá na ξ, r.

Z toho plynou nerovnosti

$$|\xi^{a-1} - \xi^{-a}| < M(1-\xi),\ \xi^a + \xi^{-a} < 2M\xi$$

a tedy též

$$|(\xi^{a-1} - \xi^{-a})(1-\xi) + \varepsilon'(\xi^a + \xi^{-a})| < M\{(1-\xi)^2 + 2\varepsilon'\xi\},$$

takže *realná část našeho výrazu* $e^{-ai\varphi}(J - J_r)$ *jest menší než* $(1-r)M$.

Část pomyslná tohoto výrazu jest pak

$$\int_r^1 \frac{(x^a + x^{-a})\sin\varphi}{(1-x)^2 + 4x\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^{1-r} \frac{[(1-t)^a + (1-t)^{-a}]\sin\varphi\,dt}{t^2 + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\,.\,(1-t)},$$

kde druhá forma vznikne z první substitucí $x = 1 - t$.

Poněvadž

$$(1-t)^{\pm a} = 1 \mp at + t^2\mathfrak{P}(t),$$

kde $\mathfrak{P}(t)$ jest konečno pro $t = (0\ldots.1-r)$, a pak

$$\int_0^{1-r} \frac{t^2\mathfrak{P}(t)dt}{t^2 + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\,.\,(1-t)} < \int_0^{1-r} \mathfrak{P}(t)dt,$$

nacházíme, že uvažovaná část pomyslná je tvaru

$$2\sin\varphi \int_0^{1-r} \frac{dt}{t^2 + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\,.\,(1-t)} + \mathfrak{M}(1-r)\sin\varphi,$$

kde $\mathfrak{M}$ je konečné pro $\varphi = 0$, $r = 1$; tento výraz ale možno vypočísti, a sice obdržíme

$$\frac{2\sin\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-r-2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\,.\cos\frac{\varphi}{2}} + \operatorname{arctg}\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right],$$
$$+ \mathfrak{M}(1-r)\sin\varphi$$

a tedy se pro $\varphi = 0$ blíží veličině π.

Máme tedy při *realném* a:

$$J = \int_0^r \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx + M'(1-r) + \pi i,$$

kde $|M'| < M$, a M nezávisí na r. Přejdeme-li k limitě pro $r = 1$, máme tedy

$$(3)\qquad J=\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx+\pi i$$

a tedy porovnáním se vzorcem (2):

$$e^{a\pi i}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx+\pi i.$$

Porovnáním částí pomyslných plyne odtud vzorec

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

a po té porovnáním částí realných:

$$(5)\qquad \int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx=\pi\cot a\pi.$$

Ze vzorců (2) a (4) plyne posléz obecný vzorec

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-xe^{i\varphi}}=\frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi},$$

aneb psáno v jiné formě [viz (1^a)]:

$$(6^a)\qquad \frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi}=\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-xe^{i\varphi}}-\frac{e^{-i\varphi}x^{-a}}{1-xe^{i\varphi}}\right)dx.$$

2\. Vzorce (4) a (5) jsou ony, jež jsme chtěli odvoditi přímo methodami počtu integralního. Vzorec (4) by se obdržel poněkud jednodušším způsobem takto: Jelikož J nezávisí na φ, máme porovnáním hodnot pro $\varphi=\pi$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ vzorec:

$$e^{\frac{a\pi i}{2}}\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z}=\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1-iz}=\int_0^\infty \frac{(1+iz)z^{a-1}\,dz}{1+z^2};$$

předpokládejme a realné a porovnejme části realné po obou stranách:

$$\cos\frac{a\pi}{2}\cdot\int_0^\infty\frac{z^{a-1}dz}{1+z}=\int_0^\infty\frac{z^{a-1}dz}{1+z^2}.$$

Píšeme-li v pravo $z^2=x$, obdrží vzorec náš tvar:

$$2\cos\frac{a\pi}{2}\cdot\Phi(a)=\Phi\left(\frac{a}{2}\right),$$

kde položeno

$$\Phi(a)=\int_0^\infty\frac{z^{a-1}dz}{1+z^2}.$$

Násobme rovnici předešlou $\sin\frac{a\pi}{2}$, a pišme

$$\Psi(a)=\sin a\pi\,\Phi(a);$$

i obdržíme vztah velmi jednoduchý:

$$\Psi(a)=\Psi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Z toho plyne pak

$$\Psi(a)=\Psi\left(\frac{a}{4}\right)=\Psi\left(\frac{a}{8}\right)=\ldots,$$

a obecně pro všecka kladná celistvá n:

$$\Psi(a)=\Psi\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Roste-li n, blíží se $\frac{a}{2^n}$ nulle, a je-li $\Psi(a)$ konečná a spojitá funkce na místě $a=0$, máme

$$\Psi(a)=\lim_{n=\infty}\Psi\left(\frac{a}{2^n}\right)=\Psi(0).$$

Že $\Psi(a)$ je spojito při $a=0$, plyne pak z následujícího rozkladu funkce $\Phi(a)$:

$$\Phi(a)=\int_0^1\frac{z^{a-1}dz}{1+z}+\int_0^\infty\frac{z^{a-1}dz}{1+z},$$

kde v prvém integrálu nahradíme $\frac{1}{1-z}$ rozdílem $1 - \frac{z}{1+z}$, čímž vznikne:

$$\Phi(a) = \frac{1}{a} - \int_0^1 \frac{z^a dz}{1+z} + \int_1^\infty \frac{z^{a-1} dz}{1+z} = \frac{1}{a} + f(a).$$

Oba integrály v pravo jsou konečny a spojity na $a = 0$, a tedy bude

$$\Psi(a) = \Phi(a) \sin a\pi = \frac{\sin a\pi}{a} + f(a) \sin a\pi$$

spojito na $a = 0$ a mimo to $\Psi(0) = \pi$; máme tedy

$$\Psi(a) = \sin a\pi\, \Phi(a) = \pi,$$

a odtud tedy vzorec (4).

Kdybychom chtěli vyčísliti integrál (5), který znamenejme A, uveďme jej nejprvé substitucí $z = \frac{1}{x}$ na tvar

$$A = \int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z} dz = \int_1^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx,$$

čímž máme:

$$2A = \int_0^\infty \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z} dz.$$

Píšíce v něm pomyslnou substituci $z = e^{i\varphi}x$, máme vzorec

$$2A = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}e^{ai\varphi} - x^{-a}e^{(1-a)i\varphi}}{1 - xe^{i\varphi}} dx,$$

který se přesně odůvodní tím, že se dokáže, že pravá strana nezávisí na φ, pokud toto náleží intervallu $(0 \ldots 2\pi)$.

Volíme-li pak $\varphi = \frac{\pi}{2}$, obdržíme

$$2A = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}e^{\frac{a\pi i}{2}} - x^{-a}e^{(1-a)\frac{\pi i}{2}}}{1 - ix} dx,$$

aneb

$$2Ae^{\frac{a\pi i}{2}} = \int_0^\infty \frac{(x^{a-1}e^{a\pi i} - ix^{-a})(1+ix)}{1+x^2}\,dx.$$

Porovnáme-li zde části pomyslné, a klademe-li ve výsledném integrálu v pravo $x^2 = z$, obdržíme užívajíce výsledku (4):

$$2A\sin\frac{a\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos a\pi}{\cos\frac{a\pi}{2}} + \frac{\sin a\pi}{\sin\frac{a\pi}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}}\right] = \pi\frac{\cos a\pi}{\cos\frac{a\pi}{2}},$$

a odtud

$$A = \pi\cot a\pi,$$

jako výše.

3. Důkazem vzorců (4) a (5) byla by naše úloha ukončena; hodláme však ještě vytěžiti nabytých výsledků pro znázornění funkcí řadami, a z té příčiny obraťme se ke vzorci (6^a):

$$\frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi} = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-ae^{i\varphi}} - \frac{e^{-i\varphi}x^{-a}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx,$$

v němž nahraďme výraz $\frac{1}{1-xe^{\pm i\varphi}}$ součtem

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu e^{\pm\nu i\varphi} + \frac{x^n e^{\pm ni\varphi}}{1-xe^{\pm i\varphi}},$$

čímž vznikne vzorec

$$\frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{e^{-(\nu+1)i\varphi}}{a-(\nu+1)}$$
$$+\int_0^1\left(\frac{x^{n+a-1}e^{ni\varphi}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{x^{n-a}e^{-(n+1)i\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx.$$

Jeli φ uvnitř mezery $(0\ldots.2\pi)$, nestane se funkce pod integrálem nikdy nekonečnou a je tedy obsažena pod stálou mezí M, nezávislou na n. Z toho můžeme dokázati, že platí

$$\text{(a)}\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^1\left(\frac{x^{n+a-1}e^{ni\varphi}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{x^{n-a}e^{-(n+1)i\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx = 0.$$

To znamená, že lze k dané sebe menší kladné veličině ε určiti n_0 tak, aby pro každé $n > n_0$ integrál za znamením lim byl menší než ε. Jelikož integrovaná funkce jest $< M$ při všech $n > 1$, bude

$\left|\int\limits_{1-\delta}^{1}\right| < M \,.\, \delta$, kde δ je malá veličina; volíme-li tedy

$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, pak bude

$$\left|\int\limits_{1-\delta}^{1}\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

v integrálu $\int\limits_{0}^{1-\delta}$ pak přicházejí pouze hodnoty x menší než $1 - \delta$, a tedy bude x^n v celém intervallu integračním velmi malé, takže lze voliti n_0 tak, aby při $n \geqq n_0$ byla vždy integrovaná funkce menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, a tedy též integrál $\int\limits_{0}^{1-\delta}$ sám. Celý integrál $\int\limits_{0}^{1}$ pak bude menší než $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ při $n \geqq n_0$, jak tvrzeno.

Máme tedy pro $n = \infty$

$$\frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu i\varphi}}{a-\nu},$$

čili ve tvaru přehlednějším:

$$\frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu}, \tag{7}$$

kde řada v pravo konverguje *stejnoměrně* vůči a, poněvadž nekonečné ubývání integrálu (a) s rostoucím n nezáviselo na hodnotě a. Píšeme-li zde $\sin a\pi = \frac{e^{2a\pi i}-1}{2ie^{a\pi i}}$, $2\pi - \varphi = 2u\pi$, $-\nu$ za ν, máme vzorec:

$$2\pi i \frac{e^{2au\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu u\pi i}}{a-\nu}, \quad 0 < u < 1, \tag{7a}$$

v integrálním počtu dávno známý, který má ten význam, že hrál důležitou roli při některých pracích *Kroneckerových.**) Jako zvláštní případ obecnějšího theorému vyskytla se tato řada u *Lipschitze*,**) a v autorově článku o tetéž věci jednajícím.***) Způsob odvození zde podaný jest zajisté nejen formálně nýbrž i methodicky nejelementárnější, poněvadž vystačí s nejzákladnějšími vlastnostmi integrálů funkcí realné proměnné. Uveďme zde jako zvláštní případ hodnotu $\varphi = \pi$, t. j. $u = \frac{1}{2}$, čímž vznikne známá řada

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a+\nu}. \tag{8}$$

Abychom mohli řadu (7) vytěžiti pro $\varphi = 0$, pišme ji ve tvaru

$$\frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-\nu i\varphi}}{a-\nu}\right)$$

a vezměme po obou stranách části realné:

$$\frac{\pi \cos a(\pi-\varphi)}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a \cos \nu\varphi}{a^2-\nu^2}. \tag{7b}$$

Pravá strana konverguje stejnoměrně i v okolí bodu $\varphi = 0$, poněvadž členové řady jsou číselně menší než příslušní členové řady

$$\Sigma \frac{2a}{a^2-\nu^2};$$

tedy můžeme bez okolků klásti $\varphi = 0$, čímž obržíme

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-\nu^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{a+\nu}, \tag{9}$$

*) Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin, 1883 (Zur Theorie der ellipt. Funktionen) a 1885. Viz též krátký článek z jeho Journalu sv. 105.: „Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale.“

**) Crelle, 54. (Untersuchung der Eigenschaften einer aus vier Elementen gebild. Reihe.)

***) Acta mathematica, t. XI.

kterýžto výsledek lze psáti též ve tvaru

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{a+\nu} - \frac{1}{\nu}\right),$$

kde v součtu Σ' dlužno vynechati člen $\nu = 0$. Porovnáme-li v obecném vzorci části pomyslné, máme

$$\text{(7}^{\text{c}}\text{)} \qquad \frac{\pi \sin a(\pi-\varphi)}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu \sin \nu\varphi}{\nu^2 - a^2}.$$

Pravá strana pro $\varphi = 0$ mizí, kdežto levá má hodnotu π; to pochází odtud, že tato rovnice byla dokázána jen pro $0 < \varphi < 2\pi$, a že pravá strana je přetržitou na místě $\varphi = 0$, což souvisí s okolností, že řada tato konverguje *nestejnoměrně* v sousedství bodu $\varphi = 0$. Ze vzorců (7^b) a (7^c) obdržíme pro $a = 0$ resp. porovnáním součinitelů při a v mocninových rozvojích obou stran:

$$\frac{1}{2}(\pi-\varphi)^2 - \frac{1}{6}\pi^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu^2},$$

$$\pi - \varphi = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu},$$

aneb píšeme-li $\varphi = 2\pi x$, vzorce:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^2\pi^2} = \frac{1}{4}(2x-1)^2 - \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu\pi} = x,$$

kde a je vždy uvnitř mezery $(0 \ldots . 1)$. Jelikož poslední řada je periodickou, o periodě 1, je patrno, že pro libovolné x představuje zbytek $x - \mathrm{E}(x)$, jejž obdržíme, odečteme-li od x největší celistvé číslo $\mathrm{E}(x)$ v něm obsažené. Tedy máme známý rozvoj velmi zajímavý

$$\mathrm{E}(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu\pi}.$$

4. Methoda, kterou jsme obdrželi vzorec (7), může vésti k výsledkům obecnějším. Na př. vyjděme z integrálu Eulerova

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}};$$

imaginarnou substitucí $x = ze^{i\varphi}$ dospějeme ke tvaru

$$\mathrm{B}(a,\, b) = \int_0^\infty \frac{e^{a\varphi i} z^{a-1} dz}{(1 + ze^{i\varphi})^{a+b}},$$

jehož správnosť lze verifikovati differencováním dlé φ. Při tom jinak mnohoznačný výraz $(1 + ze^{i\varphi})^{a+b}$ znamená onu hodnotu exponencialné funkce $e^{(a+b)\log(1+ze^{i\varphi})}$, kterou obdržíme, když za logarithmus klademe onu z jeho hodnot, jejíž pomyslná část jest obsažena mezi $-\pi$ a $+\pi$. Rozložíme-li integrál ve dva, vzaté v mezích $(0 \ldots 1)$, $(1 \ldots \infty)$, a klademe-li v druhém $z = \frac{1}{x}$, obdržíme

$$\mathrm{B}(a,\, b) = e^{a\varphi i} \int_0^1 \frac{x^{a-1} dx}{(1 + xe^{i\varphi})^{a+b}} + e^{-b\varphi i} \int_0^1 \frac{x^{b-1} dx}{(1 + xe^{-i\varphi})^{a+b}}$$

a odtud rozvinutím výrazů

$$\frac{1}{(1 + xe^{\pm i\varphi})^{a+b}}$$

dle řady binomické a integrací výsledků:

$$\mathrm{B}(a,\, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left(\frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-(b+\nu)i\varphi}}{b+\nu} \right),$$

výsledek správný pro $a + b \leqq 1$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Uvážíme-li, že tu

$$\mathrm{B}(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

obdržíme rozvinutím obou stran dle mocností a a porovnáním stálých členů:

$$\varphi i + \frac{e^{-b\varphi i}}{b} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{-b}{\nu} \left(\frac{e^{\nu\varphi i}}{\nu} + \frac{e^{-(b+\nu)\varphi i}}{b+\nu} \right) = \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}.$$

Porovnáním částí pomyslných máme tu pak

$$\varphi - \frac{\sin b\varphi}{b} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{-b}{\nu} \left(\frac{\sin \nu\varphi}{\nu} - \frac{\sin (b+\nu)\varphi}{b+\nu} \right) = 0.$$

Rovnice ta platí i pro záporná b, poněvadž pak řada konverguje absolutně; klademeli zde $b = -w$, $\varphi = u\pi$, máme tedy:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{w}{\nu} \frac{\sin (\nu - w)u\pi}{(\nu - w)\pi} = u + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{w}{\nu} \frac{\sin \nu u\pi}{\nu\pi},$$

kde $w \gtreqless -1$, $-1 < u < 1$.

O láhvi Mariottově.

Napsal

Vladimír Švejcar, professor v Příbrami.

Poněvadž odůvodnění láhve Mariottovy v učebných knihách není uvedeno, stůj zde.

Budiž t_1 hydrostatický tlak kapaliny od povrchu až k dolnímu konci trubice (od dc až po b, viz obraz 136. v Müller-Simonidově fysice pro vyšš. gymnasia), t_2 od povrchu k otvoru (a) a t k libovolnému bodu trubice; p budiž tlak vzduchu vnějšího, p' tlak plynu uvnitř láhve.

1. Otvor trubice (b) nachází se pod otvorem láhve (a). V otvoru (a) působí tlak $p' + t_2$ na venek, p do vnitř; kapalina přestane vytékati, když

$$p = p' + t_2. \tag{1}$$

V trubici zůstane kapalina státi u bodu, kde tlak shora p roven jest tlaku zdola $t + p'$, tedy:

$$p = p' + t. \tag{2}$$

Porovnáním rovnic (1) a (2) vychází, že

$$t = t_2.$$

Zůstane tedy kapalina v trubici státi ve výši otvoru.

2. Otvor trubice nachází se nad otvorem láhve (a). Tu

$$t_2 > t_1. \tag{3}$$