Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O jedné ze stěžejních otázek nauky o funkcích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123007

O jedné ze stěžejných otázek nauky o funkcích*).

Od **M. Lercha**, ř. professora české vysoké školy technické v Brně.

I.

Nejprve zmíníme se zde stručně o řadě, jež má derivace všech stupňů a přece nepřipouští rozvoje dle celistvých kladných mocnin veličiny $(x - x_0)$, nechť jest x_0 jakékoliv.

Funkce tohoto druhu poprvé byly udány od p. P. du Bois-Reymonda v XXII. svazku „Mathem. Annalen"; poněvadž však řada, již zde chceme uvažovati, vyznamenává se jednoduchým tvarem, bude snad některé čtenáře zajímati**).

Jest to řada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!}, \tag{1}$$

kdež a jest liché číslo celistvé. Řada tato konverguje, jakož i její veškery derivace***) stejnoměrně, a tedy dle známé věty připouští differencování člen po členu. Je-li b liché celistvé číslo a píšeme-li

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m},$$

obdržíme pro derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 vzorce

$$(-1)^k f^{(2k)}(x_0) = \varphi(a^{2k}) - e^{a^{2k}},$$

$$(-1)^{k+1} f^{(2k+1)}(x_0) = \psi(a^{2k+1}),$$

*) První část tohoto článku jest volným překladem úryvku pojednání ze »Journal für r. und ang. Math., svazek 103, str. 126—138; druhá část volným překladem pojednání z »Monatshefte für Math. und Physik«, 1897, (8), str. 377—382; (též Acta Math., 1899, sv. 22, str. 371—377).

**) Jak v druhé části článku bude ukázáno, byl du Bois-Reymondův důkaz (mně r. 1886 ještě neznámý) povrchní, ano i klamný. Na citovaném místě du B.-R. svůj důkaz nijak nevyložil. *M. L.*

***) Derivací jest zde rozuměti řadu vzniklou derivováním člen po členu.

Klademe-li k vůli stručnosti

$$\varphi(a^{2k}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^{2kn}}{n!} (\cos a^{n-m} b\pi + 1),$$

$$\psi(a^{2k+1}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^{(2k+1)n}}{n!} \sin a^{n-m} b\pi.$$

Taylorova věta pro funkci $f(x)$ skládá se ze tří řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi(a^{2k}) \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \psi(a^{2k+1}) \frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{a^{2k}} \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}.$$

První dvě z těchto tří řad konvergují absolutně, jak jest bezprostředně patrno, a o třetí dokážeme, že diverguje i při sebe menším $x - x_0$.

Položme za tím účelem

$$|x - x_0| = \frac{1}{y};$$

předpokládejme $y > 1$; pak jest nutno vyšetřovati výraz

$$\frac{e^{a^\nu}}{y^\nu \nu!} > \frac{e^{a^\nu}}{(y\nu)^\nu} = u_\nu.$$

Jest však pro libovolně velikou hodnotu ν

$$u_\nu = e^{a^\nu - \nu \log \nu y} > e^{a^\nu - \nu^2},$$

a poněvadž poslední veličina roste nad každou mez, platí totéž tím spíše o veličině

$$\frac{e^{a^\nu}}{y^\nu \nu!},$$

tedy také o členech třetí řady, která následkem toho diverguje, odkudž plyne, že funkce $f(x)$ v žádném bodu tvaru

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m} \quad (b \text{ liché})$$

nepřipouští rozvoje v potenční řadu.

Jelikož však tato místa se vyskytují v každém sebe menším intervallu, jest vlastně nemožno vyjádřiti $f(x)$ potenční řadou, poněvadž by se v opačném případě na určitých místech tvaru

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$$

chovala analyticky pravidelně, což našemu poslednímu výsledku odporuje.

Uzavírati však z toho nemůžeme, že Taylorova řada pro $f(x)$ také pro taková x_0, jež nejsou tvaru

$$\frac{b\pi}{a^m},$$

musí divergovati, nýbrž plyne odtud pouze, že zbytek Taylorovy řady není nekonečně malý, podobně jako tomu jest při funkci

$$e^{-\frac{1}{x^2}}$$

pro $x_0 = 0$.

II.

V 21. svazku „Mathem. Annalen" pojednává P. du Bois-Reymond o nekonečných řadách tvaru

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \sin p\, x,$$

při čemž koefficienty splňují určité podmínky asymptotické, a diskutuje zejména případ $\mu_p = e^{-\sqrt{p}}$; funkce touto řadou definovaná má derivace všech řádů, a dle náhledů du Bois-Reymondových nemohla by splynouti se žádnou funkcí komplexní proměnné, t. j. nebyla by analytickou.

Důsledek toho by byl, že při nekonečné řadě mocninné

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sqrt{m}} u^m$$

obor konvergence — kruh o poloměru $r = 1$ kol nullového bodu — byl by zároveň oborem existenčním.

To jest jistě nápadné a také p. Pringsheim na to poukázal; nicméně spokojil se jen s jednotlivými poznámkami a otázky samotné nerozřešil, ač jest rozřešení velmi jednoduché, jak chceme nyní ukázati.

Především budiž u komplexní proměnná absolutní hodnotou menší než 1 a budiž a kladná reálná veličina; pak konverguje nekonečná řada

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^m$$

absolutně; abychom poznali, jak se chová na obvodě kruhu konvergenčního $|u| = 1$ a jaká jest analytická povaha této transcendenty, použijme integrálního vzorce

$$\int_0^{\infty} e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{ax}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{am}};$$

při tom nebudeme se zdržovati důkazem rovnice

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^m \int_0^{\infty} e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{ax}{x\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} u^m e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

a přistoupíme hned k diskussi resultátu

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} u^{m-1} e^{-2\sqrt{am}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}\, dx}{(e^x - u)\, x\sqrt{x}}. \qquad (1)$$

Pro analytickou funkci

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^{m-1}, \qquad (|u| = 1) \qquad (2)$$

získali jsme takto vyjádření omezeným integrálem

$$\Phi(u) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

jež poskytne bezprostředně propagaci analytické funkce $\Phi(u)$.

Tento integrál existuje totiž pro všechny hodnoty u, jež jsou znázorněny body v komplexní rovině vyjímaje řez $(1 \ldots \infty)$ provedený v reálné ose, a má v tomto oboru patrně povahu celistvé funkce.

Odtud plyne, že naše funkce (2) připouští propagaci v celou rovinu (u), prozatím s výjimkou řezu $(1 \ldots \infty)$.

Mocninný rozvoj této funkce v bodě $u = i$ na př. plyne ze vzorce (3)

$$\Phi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (u - i)^\nu,$$

při čemž

$$A_\nu = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{(e^x - i)^{\nu+1}} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Patrno jest, že

$$|A_\nu| < \int_0^\infty e^{-\frac{a}{x}-(\nu+1)x} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\sqrt{2a(\nu+1)}},$$

a řada konverguje pro $|u-i|<1$, jak bylo zřejmo již dříve.

Chceme nyní dokázati, že se funkce $\Phi(u)$ též podél řezu $(1\ldots\infty)$ chová analyticky pravidelně s jedinou výjimkou bodu $u=1$.

Budiž L čára, jež vycházejíc z nullového bodu probíhá poblíž reálné osy v komplexní rovině (x) do nekonečna.

Pak funkce

$$\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x-u}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

chová se v oboru ohraničeném reálnou osou a křivkou L regulárně a integrál

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x-u}\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

vzatý podél čáry L jest roven integrálu $\Phi(u)$.

Integrál ten k přesnému určení svého konvergenčního oboru vyžaduje jiného řezu, od prvního řezu zcela různého (jest stanoven body $u=e^x$), a chová se ve všech bodech přímky $(1\ldots\infty)$ regulárně s výjimkou bodu $u=1$.

Konstrukce příkladů funkcí s čarami singulárními může — po pracích Weierstrassových — sledovati jen paedagogické účely. S tohoto hlediska pojednával jsem před desíti roky o některých výrazích; následkem skrovného rozšíření spisů král. čes. spol. nauk v Praze staly se tyto práce velmi málo známými, ba samotné pojednání o jistých funkcích nepřipouštějících derivace v 103. svazku Crellova Journalu (Journal für die reine und angewandte Mathematik), ušlo pozornosti p. Mittag-Lefflera*).

Zejména ve svém pojednání „Über Functionen mit beschränktem Existenzbereiche" **) odvodil jsem několik přehled-

---

*) Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm (Acta Math. sv. 15.). Moje na konci pojednání uvažovaná řada (viz první část přítomného článku. Pozn. red.) poskytuje bezprostředně funkci téže vlastnosti jako řada p. Fredholma.

**) Abhandlungen der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, VII. F. 2. Bd. 1888.

ných výrazů tohoto druhu, jakož i nové methody důkazů a zevšeobecnění. Tak na př. jest tam dokázáno, že dvojitá řada

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\mu} \binom{u}{\nu} a^{\mu\nu} u^{\mu} x^{\nu}$$

nepřipouští ze svého konvergenčního oboru $|u| < 1$, $|x| < 1$ pokračování, když konstanty m, μ nejsou celá positivní čísla a konstanta a má absolutní hodnotu 1, není však kořenem z 1.

Z jmenovaného pojednání mnoho p. A. Pringsheim v Mathem. Annalen sv. 42. a 44. znovu publikoval, tak na př. zevšeobecnění, o němž on ve sv. 42. na str. 166. pod čarou se zmiňuje, dále způsob důkazu, jehož na str. 50. a 51. použil. Ode mne pochází též poznámka, že lze utvořiti výrazy tvaru

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x - a_\nu},$$

jež svojí absolutní hodnotou zůstávají pod určitou konstantou, je-li x omezeno na obor, uvnitř něhož neleží žádný bod a_ν, ani na jeho okraji, když též všechny body tohoto okraje jsou hromadnými body (Häufungsstellen) množiny (a_ν). Ukázal jsem to na str. 7. onoho pojednání příkladem

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu \left(e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)}{x - e^{\frac{1}{\nu} + 2\nu\alpha\pi i}}, \quad (|x| \leqq 1),$$

při čemž α značí irrationálnou reálnou konstantu. O výrazech toho druhu jedná p. Pringsheim obšírněji v 42. sv. Mathem. Annalen. P. Pringsheim chtěl však v této otázce jíti dále a tvrdí, že výraz

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x - a_\nu}, \quad (\Sigma \mid c_\nu \mid \text{konverguje})$$

nepřipouští propagace z oboru c, když všechny body a_ν leží sice vně c, avšak tak, že jejich hromadné body tvoří okraj oboru c, předpokládaje, že a_ν nevyplňují žádnou část plošnou pantachicky.

„Nechtěl jsem v r. 1887 jíti tak daleko jako p. Pringsheim, a nechal jsem otázku nerozhodnutu, poněvadž se mi důkaz zdál těžký, a ještě dnes*) se mi zdá těžkým, tak že odpověď na tuto otázku nyní dáti nemohu. Myslí-li p. Pringsheim, že tato otázka jest rozluštěna jeho theorémem (na str. 168. 42. sv. Math. Annalen), jest na omylu, neboť jeho důkaz jest klamný, a správnost jeho theorému nejista.“ Přel. *K. Čupr.*

Poznámka redakce. Dlouho vládlo mínění, že lze každou funkci *reálné* proměnné, jejíž veškery derivace existují, rozvinouti v řadu Taylorovu

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

a že při tom nanejvýš třeba vyjmouti určité zvláštní body x_0. Mínění to nacházelo zdánlivé podpory ve faktu (Cauchy), že při *komplexní* proměnné existence první derivace a její spojitost zajišťují existenci všech dalších derivací a platnost Taylorova theorému uvnitř jistého oboru.

První, kdo tušil, že mínění zprvu naznačené není správné, byl P. Du Bois-Reymond. On tvrdil, že existence všech derivací *u* funkce reálné proměnné nezaručuje ještě konvergenci řady Taylorovy, t. j. analytickou povahu funkce, a podal také jisté kategorie řad, jež za jistých okolností mohou poskytovati takovéto *neanalytické* funkce. Avšak důkaz, který pro svoje tvrzení podal Du Bois-Reymond ve spisech král. Bavorské Akademie věd (a který opomenul převzíti do svého sdělení v Math. Annalen sv. XXII.), nevylučoval veškeru pochybnost. To postavil M. Lerch na jistý základ, ukázav ve svém článku Ueber die analytische Natur einer von P. Du Bois-Reymond betrachteten Funktion**), že mezi funkcemi Du Bois-Reymondovými vyskytují se též funkce v řadu Taylorovu rozvinutelné, tak že Du Bois-Reymondův důkaz musí býti nesprávný.

Otázka takto znovu se namanuvší stran existence funkcí v řadu Taylorovu nerozvinutelných byla však již od r. 1886 rozřešena nade vši pochybnost a sice přisvědčivě M. Lerchovou

---

*) Rozuměj roku 1897.

**) Monatshefte f. Math. u. Phys., sv. VIII., 1897.

řadou *)

$$f(x) = \sum_{c}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!},$$

která má derivace všech stupňů, ale rozvoje v řadu Taylorovu nepřipouští.

Tímto poznatkem dán základ k rozdělení „mathematických" funkcí ve dvě velké kategorie: ve funkce analytické, připouštějící rozvoj Taylorův (kategorie Lagrangeova), a ve funkce neanalytické, s konečným neb nekonečným počtem derivací, které Taylorova rozvoje nepřipouštějí.

Vzhledem k důležitosti předmětu pokládala redakce za účelné uveřejniti český překlad o této otázce jednajících statí M. Lerchových, který na její přání obstaral p. K. Čupr.

O určení základních substitucí hypergeometrické grupy pomocí Wirtingerovy formule.

Napsal dr. **František Graf** v Praze.

Pišme základní integrály hypergeometrické rovnice differenciální ve formě:

$$y_1 = \omega_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_0^{\alpha_0}(v, \tau)\, \vartheta_1^{\alpha_1}(v, \tau)\, \vartheta_2^{\alpha_2}(v, \tau)\, \vartheta_3^{\alpha_3}(v, \tau)\, dv$$

$$= \omega_1 \int_0^{\frac{1}{2}} f(v, \tau)\, dv$$

$$y_2 = \omega_1 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \vartheta_0^{\alpha_0}(v, \tau)\, \vartheta_1^{\alpha_1}(v, \tau)\, \vartheta_2^{\alpha_2}(v, \tau)\, \vartheta_3^{\alpha_3}(v, \tau)\, dv$$

$$= \omega_1 \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(v, \tau)\, dv.$$

---

*) Journal f. die reine und angew. Math., sv. 103, str. 136.