Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Kálal

Společné tečny dvou kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 84--90

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123004`

Řada na pravé straně jest absolutně konvergentní, poněvadž podíl dvou sousedních členů se blíží mezné hodnotě $\frac{1}{4}$.

Pro $n = 3$ dostaneme rovnici

$$\frac{\pi^2}{9} = \frac{3}{16} + sin^4 60^0 + 2^2 sin^4 30^0 + 4^2 sin^4 15^0$$

$$+ 8^2 sin^4 \frac{15^0}{2} + \ldots \text{ in inf.}$$

nebo vzhledem na

$$sin\, 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\, 30^0 = \frac{1}{2}.$$

$$\pi^2 = 9 + 144 \left(sin^4 15^0 + 2^2 sin^4 \frac{15^0}{2} + 4^2 sin^4 \frac{15^0}{4} + \ldots \right).$$

Kladouce $n = 4$ zjednáme si

$$\pi^2 = 4 + 16 \left\{ sin^4 45^0 + 2^2 sin^4 \frac{45^0}{2} + 4^2 sin^4 \frac{45^0}{4} + \ldots \text{in inf.} \right\}.$$

Konečně $n = 5$ vede ke vzorci

$$\pi^2 = 100\, sin^2 18^0 + 400 \left\{ sin^4 9^0 + 2^2 sin^4 \frac{9^0}{2} + \right.$$

$$\left. + 4^2 sin^4 \frac{49^0}{4} \ldots \text{ in inf.} \right\}.$$

Společné tečny dvou kuželoseček.

Podává **Jos. Kálal**, skut. učitel v Příboře.

Z různých poloh, jež mohou zaujímati dvě kuželosečky, vyjměme onu, ve které hlavní jich osy splývají v jednu přímku, nebo máme-li na mysli kružnici, kdy střed její nachází se s hlavní osou kuželosečky v jedné přímce. V této zvláštní poloze můžeme sestrojiti společné tečny obou kuželoseček užitím deskriptivní geometrie.

Vytkneme-li v prostoru bod v, jsou jím a danými kuželosečkami stanoveny dvě plochy kuželové, a společné jich tečné roviny sekou rovinu řídicích křivek v hledaných tečnách. Kdyby podařilo se nám najíti v prostoru takový bod v, aby zmíněné plochy kuželové byly rotační, pak vždy můžeme prostředky, jež nám skýtá elementární geometrie deskriptivní, tyto společné tečné roviny zobraziti způsobem, jenž bude níže uveden. Body takové možno najíti, a nacházejí se vždy v rovině kolmé k rovině kuželosečky a procházející její hlavní osou. Rovinu tuto ve všech dalších úvahách volme za nárysnu, a rovinu kuželosečky za půdorysnu; osa kuželosečky stotožňuje se tudíž s osou X.

Případ, kdy jedná se o sestrojení společných tečen dvou kružnic, vypusťme úplně z úvahy a obraťme se hned k *sestrojení společných tečen kružnice a ellipsy*. Buďtež $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ osy ellipsy E a s střed kružnice K. Vrcholy rotačních kuželů nad kružnicí K naplňují v nárysně kolmici s bodu s k ose X vztyčenou. Hledejme, co naplňují vrcholy rotačních kuželů nad danou ellipsou. Jak řečeno, bude to křivka rovinná, a sice v nárysně obsažená. K důkazu užijeme známé věty Dandelinovy:

Koule vepsaná do kužele a dotýkající se roviny sečné, dotýká se této v ohnisku křivky průsečné.

Geometrickým místem vrcholů v (obr. 1.) bude tedy čára naplněná průsečíky tečen vedených z bodů a a b ke kružnicím, jež se dotýkají spojnice $\overline{ab}$ ve stálém bodě o_1 nebo o_2, a jest tedy

$$\overline{av} - \overline{bv} = \overline{a\alpha_2} - \overline{b\beta_2} = \overline{ao_2} - \overline{bo_2},$$

poněvadž ale

$$\overline{ao_1} = \overline{bo_2},$$

jest

$$\overline{av} - \overline{bv} = \overline{o_1 o_2} = konst.,$$

čili: *Geometrickým místem vrcholů rotačních kuželů, jež lze nad danou ellipsou opsati, jest hyperbola, jejíž rovina procházejíc hlavní osou ellipsy jest k její rovině kolmá, a která má ohniska ve vrcholech a vrcholy v ohniskách dané ellipsy.*

Společný vrchol obou rotačních kuželů nad kružnicí K a ellipsou E jest tedy v průsečíku právě uvedené hyperboly s přímkou v bodě s kolmo k její ose vztyčenou. Tento průsečík v možno sestrojiti přímo, aniž by byla hyperbola narýsovaná. Budiž osová rovnice hyperboly

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

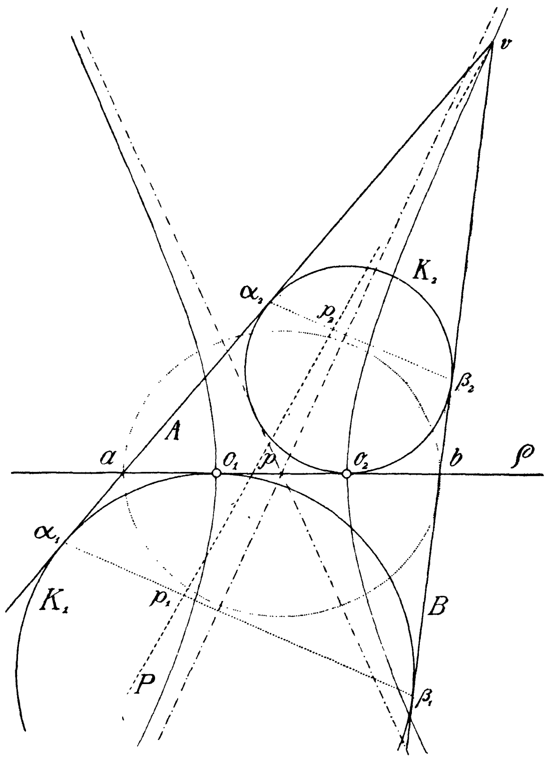
a dané přímky

$$x = \xi.$$

Pro průsečné body obou útvarů jde z daných rovnic souřadnice y ve tvaru

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\xi^2 - a^2},$$

kterýžto výraz možno pohodlně konstruovati. Jmenujeme-li v



Obr. 1.

průsečný bod naší přímky hyperbolou a α, α_1 s asymptotami hyperboly, jest souřadnice y bodů α a α_1

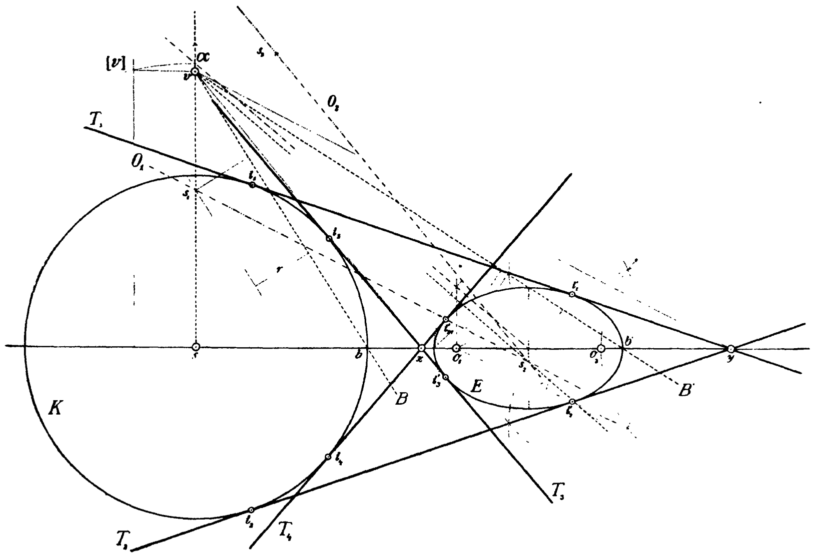
$$\eta = \pm \frac{b\xi}{a}$$

a tedy

$$\overline{v\alpha} \,.\, \overline{v\alpha_1} = (\eta - y)(\eta + y) = \eta^2 - y^2 = b^2,$$

a tohoto výsledku, jednoduššího nežli výsledek předešlý, použijeme, vyslovujíce v něm obsaženou poučku takto:

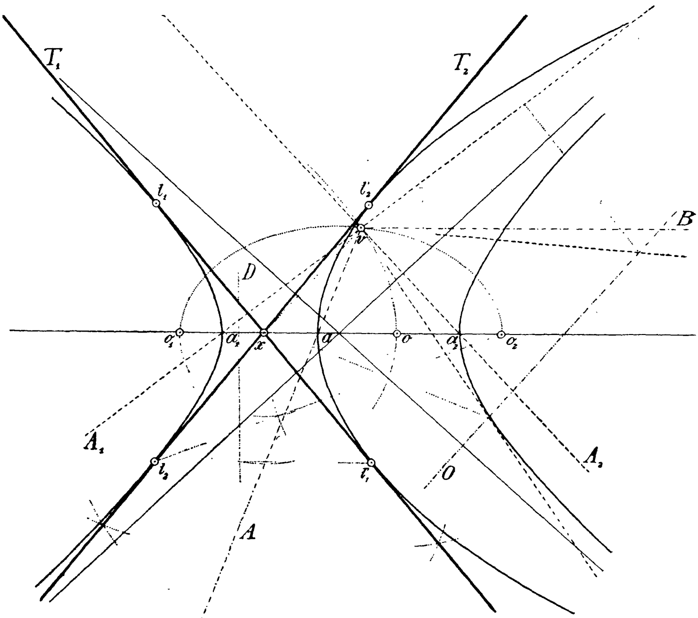
Vedlejší osa hyperboly jest střední geometricky úměrnou obou úseků, na přímce kolmé k hlavní ose hyperboly, obsažených mezi bodem průsečným a asymptotami, z čehož plyne jednoduchá konstrukce bodu v.



Obr. 2.

Abychom sestrojili společné tečné roviny kuželů (Kv) a (Ev), vepišme oběma koule o stejném, ale jinak libovolně velikém poloměru r; středy jich s_1 a s_2 (obr. 2.) jsou na osách kuželů. Těmto dvěma koulím opišme pak rotační válec; jeho osa O_1 jest spojnice ss_1 středů obou koulí a poloměr rovná se r. Sestrojíme-li bodem v k tomuto válci tečné roviny, budou se také dotýkati obou koulí, a procházejíce současně také vrcholem v, budou i tečnými rovinami obou kuželů, jímž jsou ony koule vepsány. V našem případě osa válce O_1 i bod v jsou v nárysně a proto druhé stopy tečných rovin jsou v přímce rovnoběžné s osou válce a bodem v jdoucí; tato seče hlavní osu ellipsy, stotožňující se s osou $X_{1.2}$ ve společném bodě (y) obou prvých stop, čili v bodě y protínají se hledané naše společné tečny. Vedeme-li tedy z bodu y tečny k ellipse známou konstrukcí, musí se tyto, je-li přesně rýsováno, dotýkati i kružnice K. Tak zobrazili jsme vnější společné tečny; vnitřní obdržíme podobným způsobem co prvé stopy rovin procházejících bodem v a dotýkajících se válce o ose $O_2 \equiv \overline{s_2 s_3}$, je-li s_3 na ose rotačního kužele vztyčeného třeba nad kružnicí K, a je-li $\overline{s_1 v} = v s_3$. Tím jest naše úloha pro kružnici a ellipsu úplně vyčerpána. Právě uvedeným způsobem nedala by se řešiti jen v tom případě, kdyby střed kružnice padl mezi obě ohniska ellipsy, neboť pak by se obě geometrická místa vrcholů rotačních kuželů neprotínala v reálných bodech.

Při řešení téže úlohy pro kombinaci kružnice s hyperbolou a parabolou opakuje se tentýž postup, pouze geometrická místa, jež naplňují vrcholy rotačních kuželů nad příslušnými kuželosečkami, jsou jiná. Jde-li osový řez kužele povrchovými přímkami A, A_1 a rovina ϱ seče kužel v hyperbole o vrcholích a_1, a_2 a ohniskách o_1, o_2 a jmenujeme-li α_1 dotyčný bod přímky A s koulí K_1 vepsanou do daného kužele a dotýkající se současně roviny ϱ v bodě o_1, pak snadno z obrazce, jejž laskavý čtenář načrtni si podle obr. 3., odvodíme vztah $\overline{a_1 v} + \overline{a_2 v} = \overline{o_1 o_2} = konst.$, čili: *Geometrické místo vrcholů rotačních kuželů nad danou hyperbolou jest ellipsa v rovině kolmé k rovině hyperboly, jejíž ohniska a vrcholy jsou zaměněny vrcholy a ohnisky hyperboly.* A podobně pro parabolu bychom našli, že *geometrické místo vrcholů rotačních kuželů nad ní vztyčených jest parabola v rovině k ní kolmé, mající s danou vrchol a ohnisko vystřídáno.* Abychom nalezli společný vrchol hledaných rotačních kuželů, musíme najíti průsečík ellipsy nebo paraboly s přímkou kolmou k hlavní jich ose. Průsečík této přímky s parabolou podává nám přímo konstrukce jednotlivých bodů paraboly z daného vrcholu a ohniska. Z různých způsobů, jimiž lze přímo sestrojiti průsečík ellipsy s přímkou kolmou k její velké ose, uvádíme tyto nejjednodušší: α) Opíšeme-li nad oběma osami co průměry kružnice a značíme-li v' průsečík dané přímky s kružnicí nad hlavní osou opsanou a v'' průsečík spojnice $\overline{sv'}$ s menší kružnicí, pak $v''v'' \parallel \overline{ab}$. — β) V affinitě, jejíž osa jest totožná s hlavní osou ellipsy a směr paprsků k této kolmý, odpovídá dané ellipse kružnice nad průměrem $\overline{ab}$ a průsečíku ellipsy s danou přímkou kolmou k hlavní ose, průsečík téže přímky s affinně přidruženou kružnicí. — γ) Užijeme-li analytické geometrie, volivše osy ellipsy za osy sou-



Obr. 3.

řadnicové, plyne souřadnice

$$y_v = b^2 - \frac{b^2 \xi^2}{a^2},$$

kde ξ jest vzdálenost dané přímky od počátku a značíme-li

$$\frac{b\xi}{a} = \zeta,$$

jest

$$y_v = b^2 - \zeta^2,$$

což lze jednoduše konstruovati. —

Jedná-li se o společné tečny 2 kuželoseček, jichž hlavní osy jsou v jedné přímce, ale z nichž žádná není kruhem, nemáme v obecném případě konstrukce kvadratické, jíž by se dal bod v přímo sestrojiti, a jest nutno části příslušných geometrických míst v okolí průsečíku co nejpřesněji zobraziti, jak ukazuje obr. 3., v němž sestrojeny společné tečny hyperboly a paraboly. V poloze, již obě křivky na obraze zaujímají, obdržíme pouze dvě společné tečny, neboť také oba rotační kužele mají pouze dvě společné tečné roviny, o čemž každý snadno se přesvědčí.

Součty některých řad.*)

Napsal **K. Čupr.**

II.

V „Příloze" tohoto časopisu roč. XXXIV. proponována byla úloha sečísti řady

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{3}+\binom{m}{6}+\dots$$
$$\binom{m}{0}+\binom{m}{4}+\binom{m}{8}+\dots$$

Možno však sečísti řady tvaru daleko obecnějšího, totiž

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= \binom{n}{0}+\binom{n}{m}+\binom{n}{2m}+\binom{n}{3m}+\dots \\ S_1 &= \binom{n}{1}+\binom{n}{m+1}+\binom{n}{2m+1}+\binom{n}{3m+1}+\dots \\ &\vdots \\ S_{m-1} &= \binom{n}{m-1}+\binom{n}{2m-1}+\binom{n}{3m-1}+\dots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Za tím účelem uvažujme binomickou rovnici

$$\alpha^m - 1 = 0,$$

jejíž kořeny buďtež $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \dots \alpha_m$.

Tu platí především vztah

$$\alpha_k^{m+l} = \alpha_k^m \,.\, \alpha_k^l = \alpha_k^l. \quad (2)$$

Vztah tento platí pro libovolné $k = 1, 2 \dots m$ a pro jakékoliv číslo l.

*) Viz Přílohu k loňskému ročníku, str. 407.