Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 3, 245--255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122994

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

(Pokračování.)

15. Z rovnice (25), kterou možno psáti také takto:

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)$$

(α . . kořeny rovnice $\xi(t) = 0$, jichž r. č. jest kladná), plyne, že $log\ \xi(t)$ má logarithmické body jednak ve všech α, jednak ve všech $-\alpha$. Rozřízneme-li rovinu t čarou γ, jež spojujíc všecky body α probíhá do nekonečna uvnitř pruhu omezeného přímkami vedenými rovnoběžně k reální ose po obou stranách ve vzdálenosti $= \frac{1}{2}$ (viz odst. 10.), a čarou γ', jež spojujíc všechny body $-\alpha$ jest ku γ symmetrická vzhledem ku středu $t = 0$, můžeme v rozřezané rovině definovati:

$$log\ \xi(t) = log\ \xi(0) + \int_0^t \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\, dt; \tag{26}$$

integrační čára nesmí překročiti γ ani γ' a $log\ \xi(0)$ budiž reální (cf. odst. 9. na konci).

Definujeme-li dále za těchže supposicí

$$log\left(1 \mp \frac{t}{\alpha}\right) = \int_0^t \frac{dt}{t \mp \alpha}, \tag{27}$$

obdržíme z rovnice

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{t-\alpha} + \frac{1}{t+\alpha}\right),$$

jež vyplývá přímo z (25), integrací v mezích $0 \ldots t$

$$log\ \xi(t) = log\ \xi(0) + \sum_{\alpha} \left[log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) + log\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)\right] \tag{26a}$$

a pro $t = \frac{i}{2}$

$$\begin{aligned} log\,\xi\left(\frac{i}{2}\right) &= -\,log\,2 = log\,\xi\,(0) \\ &+ \sum_{\alpha}\left[log\left(1-\frac{i}{2\alpha}\right)+log\left(1+\frac{i}{2\alpha}\right)\right]. \end{aligned} \tag{26b}$$

Že jest nutno položiti — cf. rov. (11) — právě

$$log\,\xi\left(\frac{i}{2}\right) = -\,log\,2$$

následuje snadno z poznámky na konci odst. 9.; integrál na pravé straně rovnice (26) může býti pro $t = \frac{i}{2}$ vzat podél imaginární osy a má reální hodnotu,

$$log\,\xi\left(\frac{i}{2}\right)$$

musí býti tedy reální.

V rovině proměnné s, která souvisí s t rovnicí

$$s = \frac{1}{2} + ti,\ t = \frac{i}{2} - is, \tag{6}$$

definujme

$$log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} \pm \alpha i}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{s} \frac{ds}{s - \frac{1}{2} \mp \alpha i} + log\frac{2\alpha i}{2\alpha i \pm 1}; \tag{28}$$

na pravé straně jest druhý člen roven přímočarému integrálu

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s - \frac{1}{2} \mp \alpha i} = log\frac{2\alpha i}{2\alpha i \pm 1} \tag{28a}$$

a v prvním členu jest voliti integrační čáru v rovině s tak, aby neprotínala žádný z řezů, jež jsou obrazy řezů γ a γ' vedených v rovině t určené transformací (6). Označíme-li tyto obrazy týmiž symboly γ a γ' jako originály, spojuje v rovině s čára γ všechny komplexní nullové body funkce $\zeta(s)$, jichž imaginární část jest kladná, a čára γ' všechny n. b. téže funkce s imag. částí negativní.

V rovině s opatřené řezy γ a γ' jest levá strana rovnice (28) za uvedeného předpokladu o integrační čáře jednoznačnou funkcí s. Je-li $s = 0$, může se na pravé straně v (28) integrovati podél reálné osy; poněvadž logarithmus na pravé straně v téže rovnici jest definován přímočarým integrálem (28a), jest

$$\lim_{s=0} log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} \pm \alpha i}\right) = 0. \tag{29}$$

Z rovnic (6), (27) a (28) plyne dále, že

$$log\left(1 \mp \frac{t}{\alpha}\right) = \int_0^t \frac{dt}{t \mp \alpha} = \int_{\frac{1}{2}}^s \frac{ds}{s \mp i\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$= log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} \pm \alpha i}\right) - log\,\frac{2\alpha i}{2\alpha i \pm 1}$$

a tedy dle (26a)

$$\sum_\alpha \left[log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) log + \left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)\right] = log\,\xi(t) - log\,\xi(0)$$

$$= \sum_\alpha \left[log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right)\right.$$

$$\left. - \left(log\,\frac{2\alpha i}{2\alpha i + 1} + log\,\frac{2\alpha i}{2\alpha i - 1}\right)\right].$$

Pro $t = \frac{i}{2}$, $s = 0$ obdržíme vzhledem k (26b) a (29)

$$- log\,2 - log\,\xi(0) = - \sum_\alpha \left(log\,\frac{2\alpha i}{2\alpha i + 1} + log\,\frac{2\alpha i}{2\alpha i - 1}\right).$$

Odečtouce obě poslední rovnice obdržíme

$$log\,\xi(t) = \sum_\alpha \left[log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right)\right.$$

$$\left. + log\left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right)\right] - log\,2. \tag{26c}$$

V této rovnici jest dle odvození $log\,\xi(t)$ definován dle (26), logarithmy na pravo dle (28) a $log\,2$ je reální; součet se vztahuje na ty kořeny rovnice $\xi(t) = 0$, jejichž reální část jest kladná. —

Logarithmus funkce $\zeta(s)$ má vzhledem k rovnici (9)

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} \xi(t)}{(s-1)\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} \xi(t)}{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \tag{9}$$

rozvětvovací body

a) v komplexních nullových bodech $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ funkce $\zeta(s)$, ježto $s = \frac{1}{2} + ti$,

b) v bodě $s = 1$,

c) v pólech $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$, t. j. v bodech $s = -2, -4, -6\ldots$

Abychom mohli $\log \zeta(s)$ jednoznačně definovati, připojme v rovině s k řezům γ a γ' řez δ vedený podél přímky δ spojující bod $s = 1$ s tím komplexním nullovým bodem $\frac{1}{2} + \alpha$ funkce $\zeta(s)$, jehož maginární část jest nejmenší (a ovšem kladná, ježto reální část α jest kladná), a řez ε vedený podél reální osy od bodu $s = -2$ počínaje na levo do nekonečna. V rovině s rozříznuté třemi řezy: $\delta + \gamma$, γ' a ε jest $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ všude spojitá funkce; budiž

$$\log \zeta(s) = \int_0^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds - \log 2 + \pi i. \tag{30}$$

Integrál nesmí překročiti žádný řez; $\log 2$ budiž reální. Tato definice přechází pro $s = 0$ v

$$\log \zeta(0) = -\log 2 + \pi i,$$

což se shoduje s rovnicí (12).

$\log \xi(t)$ jest dle (26) reální pro ryze maginární hodnoty t, t. j. pro reální hodnoty s; v rozřezané rovině s buďtež také logarithmy

$$\log(s-1) \text{ a } \log \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$$

reální pro s reální a větší než 1. Za těchto supposic lze psáti ($log\ \pi$ reální) na základě rovnice (9):

$$\begin{aligned} log\ \zeta(s) = log\ \xi(t) + \frac{s}{2}\, log\ \pi \\ - log\ (s-1) - log\ \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right). \end{aligned} \tag{30a}$$

Důkaz: Pravá strana jest reální, když jest s reální a větší než 1. Blíží-li se s od takové hodnoty k $s = 0$ podél reální osy, zůstávají první, druhý a čtvrtý člen na pravo reálními a blíží se k hodnotám $- log\ 2$, 0 a $- log\ \Gamma(1) = 0$. Třetí člen vyžaduje, aby se s při tom přechodu vyhnulo bodu $s = 1$: to se však může státi jenom *pod* reální osou, neboť nad reální osou vybíhá z bodu $s = 1$ řez $\delta + \gamma$. Amplituda binomu $(s-1)$, jež se původně rovnala nulle, přejde v $-\pi i$, tedy jest

$$log\ \zeta(0) = - log\ 2 + \pi i,$$

kterážto rovnice dokazuje totožnost obou definic (30) a (30a) pro $log\ \zeta(s)$.

Ze známé formule

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \lim_{n=\infty} \frac{n^{\frac{s}{2}}}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{2n}\right)}$$

plyne rovnice

$$- log\ \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \lim_{n=\infty}\left[-\frac{s}{2}\, log\, n + \sum_{m=1}^{n} log\left(1+\frac{s}{2m}\right)\right].$$

Nahradíme-li v (30a) na pravé straně poslední člen touto limitou a první člen řadou (26c), obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{log\ \zeta(s)}{s} = \frac{log\ \pi}{2} - \frac{log\ 2}{s} - \frac{log\ (s-1)}{s} \\ + \lim_{n=\infty}\left[-\frac{log\ n}{2} + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s}\, log\left(1+\frac{s}{2m}\right)\right] \\ + \sum_{\alpha}\left[\frac{1}{s}\, log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \frac{1}{s}\, log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

V poslední řadě jest nutno seřaditi členy dle rostoucí reální části kořenů α.

Integrallogarithmus.

16. Pro hodnoty proměnné x reální a větší než 1 jest definován integrallogarithmus x rovnicí

$$Li\,(x) = \lim_{h=0}\left(\int\limits_0^{1-h}\frac{dy}{\log y} + \int\limits_{1+h}^{x}\frac{dy}{\log y}\right),\ h > 0.$$

Zavede-li se místo y nová integrační proměnná z rovnicí

$$y = e^z \text{ nebo } y = x^z,$$

obdržíme

$$Li\,(x) = \lim_{\delta=0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{e^z\,dz}{z} + \int\limits_{\delta}^{\log x}\frac{e^z\,dz}{z}\right),\ \delta > 0 \tag{32}$$

nebo

$$Li\,(x) = \lim_{\varepsilon=0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{x^z\,dz}{z} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{x^z\,dz}{z}\right),\ \varepsilon > 0; \tag{33}$$

logarithmy jsou vesměs reální.

Že limity naznačené na pravých stranách rovnic (32) a (33) skutečně existují, plyne z této úvahy:

V závorce na pravé straně rovnice (32) jest za integračním znamením funkce $\frac{e^z}{z}$, jež má v bodě $z = 0$ pól s residuem $= 1$.

Budiž A čára v rovině z složená z těchto tří částí: z úseku reální osy od $-\infty$ do $-\delta$, z půlkruhu, jenž maje střed v $z = 0$ spojuje body δ a $-\delta$, a z úseku reální osy od $-\delta$ do $\log x$.

Pro $\lim \delta = 0$ obdržíme

$$\int\limits_A \frac{e^z\,dz}{z} = Li\,(x) \mp \pi i.$$

Na pravo jest voliti horní neb dolní znamení dle toho, probíhá-li zmíněný půlkruh nad reální osou aneb pod ní; $Li\,(x)$ jest limita naznačená na pravé straně v (32). Limita ta existuje, poněvadž integrál podél A vzatý má konečnou hodnotu.

Píšeme-li e^x místo x, máme

$$Li\,(e^x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^z\,dz}{z} \mp \pi i; \tag{34}$$

vyhýbá-li se integrační čára A'*) bodu $z = 0$ nad (pod) reální osou, jest vzíti na pravo horní (dolní) znamení.

Dle odvození platí formule (34) pro reální $x > 0$. Ale její platnost lze snadno rozšířiti pro libovolné komplexní hodnoty x. Pro komplexní x stanovme v integrálu (34) integrační čáru B' takto.

B' budiž úsek přímky vedené rovnoběžně s reální osou z $-\infty$ do x; je-li imaginární část x kladná, jest vzíti v (34) horní znamení, je-li záporná, dolní. Analytická funkce $Li(e^x)$ proměnné x vzorcem (34) definovaná má tyto vlastnosti:

a) pro reální $x = x_0 > 0$ shoduje se s integrallogarithmem v původní definici, neboť lze integrační čáru B' převésti spojitou deformací v čáru A', aniž by se hodnota integrálu změnila, blíží-li se x k nějaké reální hodnotě $x_0 > 0$. Půlkruh kolem bodu $z = 0$ jest nad reální osou neb pod ní dle toho, blíží-li se x k x_0 hodnotami, jichž imaginární část jest kladná neb záporná.

b) jest spojitá pro všecky konečné hodnoty x, vyjímaje reální hodnoty záporné. Neboť blíží-li se x k reální záporné hodnotě x', konverguje $Li(e^x)$ k

$$\int_{-\infty}^{x'} \frac{e^z\,dz}{z} - \pi i \quad \text{nebo k} \quad \int_{-\infty}^{x'} \frac{e^z\,dz}{z} + \pi i$$

(integrál přímočarý) dle toho, děje-li se ten přechod skrze hodnoty x, jejichž reální část jest kladná neb záporná. (Riemann *61*, Mangoldt *41*) **).

Právě tak jako byl vzorec (34) odvozen z (32), odvodí se z (33) pro reálná x větší než 1

$$Li(x) = \int_{-\infty}^{1} \frac{x^\beta\,d\beta}{\beta} \mp \pi i. \tag{35}$$

Integrační čára může se vyhnouti pólu $\beta = 0$ buď nad reální

*) A' obdržíme, připojíme-li k A úsek reální osy od $z = \log x$ do $z = x$.

**) Definice integrallogarithmu $Li(e^x)$ pro $x < 0$ nejsou u všech autorů souhlasné. Viz na př. (*55*) a (*52*).

osou neb pod ní; dle toho se volí na pravo buď horní neb dolní znamení.

17. Mangoldt (*43*) naznačil, jak se dá jednoduše dokázati věta:

$$\lim_{x=\infty} Li(x) \cdot \frac{\log x}{x} = 1. \tag{36}$$

Důkaz: Položíme-li

$$Li(2) = C = \lim_{\delta=0}\left(\int_0^{1-h}\frac{dx}{\log x} + \int_{1+h}^{2}\frac{dx}{\log x}\right),\ h > 0,$$

jest

$$Li(x) = C + \int_2^x \frac{dx}{\log x} = C + \left[\frac{dx}{\log x}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dx}{\log^2 x}$$

aneb

$$Li(x) = C' + \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dx}{\log^2 x},$$

kde konstanta C' jest určena rovnicí

$$C' = C - \frac{2}{\log 2}.$$

Patrně jest

$$\int_2^x \frac{dx}{\log^2 g} < \frac{x}{\log^2 2},$$

a tedy dle poslední rovnice pro $Li(x)$:

$$Li\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) < C' + \frac{x}{\log^2 x\,(\log x - 2\log\log x)} + \frac{x}{\log^2 x \log^2 2}.$$

Z toho následuje, že

$$\lim_{x=\infty} Li\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \cdot \frac{\log x}{x} = 0.$$

Poněvadž lze pro každé $x > 1$ psáti

$$Li(x) = Li\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + \int_{\frac{x}{\log^2 x}}^{x} \frac{dx}{\log x}$$

a tedy, je-li $\log x > 1$,

$$Li(x) < Li\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + x\left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right)\frac{1}{\log x - 2\log\log x},$$

$$Li(x) > Li\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + x\left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right)\cdot\frac{1}{\log x},$$

obdržíme ihned rovnici (36).

Riemannova formule.

18. Budiž $F(x)$ počet prvočísel menších než x. Položíme-li (prozatím supponujeme, že x není celé číslo)

$$f(x) = Fx + \frac{1}{2}F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots ^{*)}, \tag{37}$$

platí dle Riemanna tato rovnice:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \frac{\log\zeta(s)}{s}\,ds, \quad a > 1 \tag{38}.$$

Integrační čarou jest přímka rovnoběžná s imaginární osou a procházející reálním bodem $s = a$.

Riemann odvodil (38) inversí rovnice

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int\limits_0^\infty f(x)\,.\,x^{-s-1}\,dx, \tag{38a}$$

která se jednoduše dokáže z Eulerovy rovnice (1). Tato inverse, kterou provedl Riemann Fourierovými integrály, uvádí se od pozdějších autorů v nejrůznějších formách. Uvádím níže přesnou formulaci a důkaz rovnice (38), který podal Landau (*36* p. 741—742).

Předesílám důkaz Cauchyovy věty (39) a odůvodnění jiné definice (37a) funkce $f(x)$ definované původně rovnicí (37).

Pro každé reální číslo a větší než 1 a pro reální y jest

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{y^s ds}{s} = 1 \text{ neb } \frac{1}{2},\ T > 0, \tag{39}$$

---

*) Řada na pravo má jen konečný počet členů, ježto 1 se za prvočíslo nepovažuje.

dle toho, je-li

$$y > 1 \text{ neb } y = 1.$$

Tuto větu, kterou znal již Cauchy, lze odvoditi různými způsoby. Můžeme na př. vycházeti z Laplaceova integrálu

$$\lim_{T=\infty} \int_{-T}^{T} \frac{a \cos uv + u \sin uv}{a^2 + u^2} du = 2\pi e^{-va}; \quad a > 0, v > 0.$$

Kladouce

$$z - a = iu$$

obdržíme

$$\int_{a-iT}^{a+iT} e^{vz} \frac{dz}{z} = i \int_{-T}^{T} \frac{e^{v(a+iu)}}{a+iu} du = ie^{va} \int_{-T}^{T} \frac{a \cos uv + u \sin uv}{a^2 + u^2} du$$

$$+ e^{va} \int_{-T}^{T} \frac{u \cos uv - a \sin uv}{a^2 + u^2} du.$$

Poslední integrál jest roven nulle. Pro

$$e^v = y$$

obdržíme z Laplaceova vzorce

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{y^z dz}{z} = 1, \; y > 1.$$

Je-li $v = 0$, máme jednoduše

$$\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{dz}{z} = i \int_{-T}^{T} \frac{a\, du}{a^2 + u^2} = 2i \operatorname{arctg} \frac{T}{a},$$

tedy

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}.$$

Na místo definice (7) funkce $f(x)$ lze zavésti definici jinou, úplně equivalentní. Budiž $b_n = \frac{1}{m}$, je-li index n m-tou mocninou nějakého prvočísla, a $b_n = 0$ pro všecka n nehovící této podmínce; předpokládejme dále, že x není celé číslo, označujíce symbolem $[x]$ největší celé číslo v x obsažené. Pak jest

$$f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} b_n \tag{37a}$$

Neboť v řadě na pravo jest každý člen, jehož index n jest prvočíslo, roven 1; součet těchto členů dává $F(x)$. Každý člen, jehož index n jest roven m-té mocnině nějakého prvočísla, rovná se $\frac{1}{m}$; součet těch členů dává $\frac{1}{m} F(x^{\frac{1}{m}})$. Členy, jichž indexy nejsou mocniny prvočísel, rovnají se nulle, takže definice (37) a (37a) souhlasí.

Příspěvek k plochám rotačním 2. stupně.

Fr. Kadeřávek, assistent české techniky.

V pojednání „O specielním kvadratickém komplexu tetraedálním“ *) ukázal p. vládní rada, prof. V. Jarolímek, analytickým způsobem, že komplex uvažovaný obsahuje nepřímkové plochy druhého stupně, béřeme-li v úvahu též jeho přímky imaginárné a že možno nepřímkové plochy 2. stupně vytvářeti obdobným způsobem přímkami imaginárnými jako plochy sborcené přímkami reálnými. I možno příkladem vytvořiti rotační plochy nepřímkové 2. stupně otáčením jisté dvojiny přímek imaginárných kol reálné osy. K synthetickému důkazu odvodíme si předem následní větu: „Jsou-li dány přímky O' a $A' \perp B'$ (obr. 1.) a vedeme-li přímku $P' \perp O'$. na kterouž naneseme od průsečíku s O' do bodu l' střední geom. úměrnou úseček vytčených na P' přímkami O', A' a O', B', vyplní bod l', posunujeme-li přímku P' rovnoběžně, kružnici trojúhelníku $O'A'B'$ opsanou; O' jest pro ni průměrem.

Označme průsečíky přímky $P' \perp O'$ s přímkami O', A', B s kružnicí L' trojúhelníku $O'A'B' \equiv 1'2'3'$ opsanou písmenami o', a', b' a l'; pak $3'o'b' \sim a'o'1'$, i platí úměra $\overline{3'o'} : \overline{o'b'}$

*) Věstník král. české společnosti náuk v Praze, 1906.