Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Bydžovský

O immaginárných bodech. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 3, 317--329

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122990`

Položíme-li pak v rovnici (5)

$$\delta_1 = \alpha', \quad \eta\delta_2 = \beta',$$

dostaneme

$$\alpha'^5 + \beta'^5 = \varepsilon'\lambda^{5(n-1)}\gamma'^5. \tag{6}$$

Rovnice tato jest téhož typu jako (2), jen že jest v ní $n-1$ místo n. Podobným způsobem, jako jsme přešli od rovnice (2) k rovnici (6), mohli bychom přejíti od (6) k rovnici téhož typu jako (2), kde by však bylo u 2 místo n a tak podobně až k rovnici s $n = 1$, která, jakož již vytčeno, jest nemožná. Tím dokázána věta Fermatova i pro druhý z obou vytčených případů.

O immaginárných bodech.

Píše dr. **B. Bydžovský.**

§ 1. Základní úvahy.

1. V algebře nazýváme *úlohou n-ho stupně* takovou úlohu, jež vede k rovnici (nebo soustavě rovnic) n-ho stupně. Omezíme-li se na úlohy o jedné neznámé, je patrno, že úloha n-ho stupně má n řešení; tedy úloha stupně prvého (lineárná) jediné řešení, úloha stupně druhého (kvadratická) dvě řešení atd.

Podobným způsobem lze tříditi konstruktivní úlohy v geometrii. Konstruktivní úloha žádá, aby byl sestrojen útvar vyhovující daným podmínkám.

Vyhovuje-li daným podmínkám jediný útvar, pravíme, že úloha má jediné řešení a nazýváme ji *lineárnou*; vyhovují-li útvary dva, *kvadratickou*: všeobecně je úloha stupně n-ho, vyhovuje-li podmínkám daným n útvarů. Pomýšlejme na úlohy, jež žádají nalezení bodů, vyhovujících daným podmínkám (na takové úlohy lze za jistých předpokladů převésti všechny konstruktivní úlohy). Budiž na příklad dána úloha, určiti na dané přímce p bod mající od dvou daných bodů A a B tutéž vzdálenost. Takový bod je jen jeden, ježto je dán jako průsečík dvou přímek, přímky p a osy úsečky $\overline{AB}$. Tuto úlohu nazveme v našem smyslu lineárnou. Naproti tomu úloha: určiti bod mající od dvou daných bodů S, S' dané vzdálenosti

r, r', je v našem smyslu kvadratická, ježto body hovící úloze jsou dva, totiž průsečíky obou kružnic o středech S, S' a poloměrech r, r' [1]).

Ovšem je třeba ihned dodati: tato úloha má dvě řešení, jen když obě zmíněné kružnice se skutečně protnou. Jestliže se dotýkají, má úloha jediné řešení, totiž dotyčný bod; neprotínají-li se vůbec, říkáme, že úloha nemá řešení.

Celkem totéž lze říci o každé kvadratické úloze, totiž: buď má tato úloha dvě řešení, nebo jedno, nebo žádné.

2. Vrátíme se k algebře. To, co právě bylo řečeno o kvadratické úloze geometrické, lze také říci o kvadratické rovnici, jež má rovněž buď dvě řešení, nebo jedno (jež lze pokládati za dvojnásobné), nebo žádné. Tento výrok však je přesný, jen pokud pomýšlíme na řešení reálná. Avšak je známo, že zavedeme-li čísla immaginárná, má každá rovnice kvadratická řešení. Vyslovujeme pak větu o rovnici kvadratické: *Každá rovnice kvadratická má dva kořeny.* K tomu dodáme — jednou pro vždy —: tyto kořeny jsou buď reálné různé, nebo reálné splývající, nebo immaginárné. Předpokládáme při tom, že koefficienty této rovnice jsou reálné. O immaginárných kořenech lze se vysloviti určitěji: tyto kořeny jsou čísla immaginárná sdružená, t. j. je-li jeden kořen $a + bi$, je druhý $a - bi$.

3. Zavedením immaginárných čísel nabude věta: „každá rovnice 2. stupně má dva kořeny“ úplné všeobecnosti. Je na snadě otázka, zda-li nelze podobně nějakým způsobem docíliti toho, aby také o každé kvadratické úloze geometrické bylo lze vysloviti obecně platnou větu: *„každá geometrická úloha 2. stupně má dvě řešení.“*

Nehodláme se zabývati obecným zodpověděním této otázky; avšak ukážeme na řadě příkladů, kterak i v geometrii lze v případě kvadratických úloh docíliti té všeobecnosti, kterou jsme poznali v algebře.

---

[1]) Toto rozdělení úloh na lineárné a kvadratické nemá nic společného s otázkou, zdali lze určitou úlohu sestrojiti jen pravítkem nebo je-li k tomu třeba také kružítka.

§ 2. Zavedení immaginárných bodů.

4. Základní a nejjednodušší úloha kvadratická je: určiti průsečíky přímky a kružnice, jsou-li tyto dvě čáry dostatečně určeny. Sestrojíme je, a tu mohou nastati tři případy: buď přímka kružnici seče ve dvou bodech, nebo se jí dotýká, nebo nemá žádného bodu s ní společného. Tuto větu nahradíme jedinou jednodušší: *„přímka protíná kružnici* (v téže rovině ležící) *vždy ve dvou bodech"*, jestliže případ druhý převedeme na prvý, pokládajíce bod dotyčný za dvojnásobný průsek (jak se to v geometrii blíže vykládá), a jestliže zavedeme body immaginárné touto definicí: *Je-li v rovině dána kružnice a přímka mimoběžná, pravíme, že tato přímka a kružnice mají společné dva body immaginárné.* Dle obdoby kvadratických rovnic, u nichž immaginárná řešení jsou sdružená, nazýváme tyto body immaginárnými sdruženými (budeme stručně říkati: body immaginárné). Body obyčejné nazýváme reálnými.

Opakujeme: výsledkem zavedení právě učiněného je, že všeobecně platí věta „přímka protíná kružnici vždy ve dvou bodech." A dodáme: ty jsou buď reálné (různé nebo splývající), nebo immaginárné (sdružené).

5. Jakmile jsme přisoudili kružnici a přímce určité dva průsečíky v každém případě, *můžeme přisouditi v každém případě dvě řešení*[2]) *všem těm úlohám, kde běží o průsek určité kružnice s přímkou.*

Na příklad: Geometrické místo bodů, z nichž danou kružnici vidíme pod daným úhlem, je kružnice s danou soustředná. I má úloha: „určiti na dané přímce bod, z něhož danou kružnici vidíme pod daným úhlem" vždy dvě řešení reálná (která mohou po případě splynouti v jedno), když daná přímka onu kružnici, kterou snadno sestrojíme, protíná ve dvou reálných bodech (po případě se jí dotýká). Jestliže to však nenastane, pak má, dle našeho zavedení, přímka s kružnicí společné dva immaginárné body; *tyto immaginárné body pokládáme v tom případě za* (*immaginárná*) *řešení dané úlohy.*

---

[2]) Jsou totiž úlohy, jak hned uvidíme, jež vedou k sestrojení ne jediné kružnice, nýbrž nekonečně mnoha kružnic. Na takové zatím se naše úvaha nevztahuje.

Má tedy tato úloha vždy dvě řešení. Pokládáme body hovící úloze za sestrojené tím, že je dána přímka a kružnice, která přímku v hledaných bodech protíná.

Jiné úlohy toho druhu: určiti na přímce dané bod, jenž má k dané kružnici danou mocnost; určiti bod, mající od dvou bodů vzdálenosti stejné a od třetího bodu vzdálenost danou, atd. atd.

6. *Poznámky.* *a*) Kdo zná analytickou geometrii, tomu jsou předchozí výklady ne-li vesměs známy, tedy jistě beze všeho jasny. Ať si vzpomene, že souřadnice průsečíků kružnice s přímkou jsou dány kvadratickou rovnicí, jež může míti také immaginárné kořeny, které jsou sdružené. V tom je vlastní důvod, proč oba immaginárné průseky kružnice s přímkou nazýváme sdruženými. V dalším nebudeme užívati method analytické geometrie.

b) Je jasno, že immaginárným bodům hovícím určité úloze přisuzujeme tytéž vlastnosti, jaké bychom přisoudili bodům reálným, téže úloze hovícím. Tedy na př. pro immaginárné průseky přímky a kružnice je dobře, výslovně si připomenouti: že tyto průsečíky leží jak na přímce, tak na kružnici; že jsou to body přímky, jež mají od středu kružnice vzdálenost rovnou poloměru kružnice; že jejich potence vzhledem ke kružnici je rovna nulle, atd. atd.

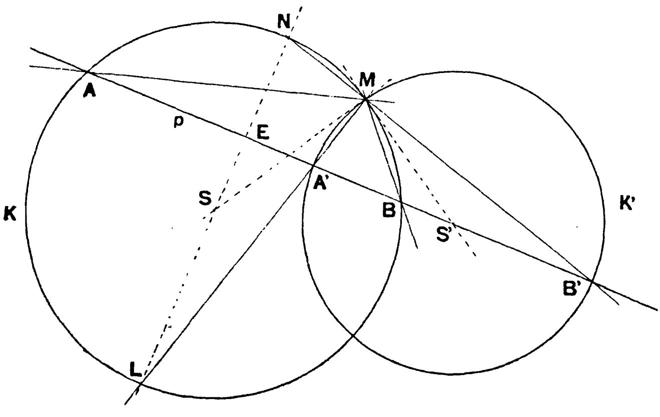
c) Mohlo by se zdáti, že zavedení im. bodů je věc umělá, nemající hlubšího významu. Uvidíme však v dalším, že *jako dovedeme čísly immaginárnými počítati* (přes to, že si jich nedovedeme představiti), tak dovedeme také s im. body *prováděti geometrické konstrukce,* jestliže stále máme na paměti hořejší definici těchto bodů (nic nám při tom nevádí, že si těchto bodů nedovedeme představiti). V tom tkví oprávněnost zavedení im. bodů. Viděli jsme mimo to, a uvidíme ještě na dalších příkladech, jak zavedením těchto bodů *se vyjadřování vět a úloh zjednoduší.*

d) Kdežto immaginárné číslo může býti dáno jen jedno, jsou dle definice dány im. body vždy současně dva, a nedovedeme jich navzájem rozlišiti. S touto okolností souvisí, že konstrukce s body im. jsou obyčejně složitější — jak uvidíme —

než s body reálnými; právě proto, že provádíme při tom konstrukci s dvojicí bodovou.

§ 3. Kružnice, svazek kružnic, harmonické čtveřiny.

7. Běží nyní o to, vniknouti hloub v podstatu dvojic immaginárných bodů sdružených. Naskytá se především otázka, jak poznáme, zdali dvě dvojice takových bodů jsou totožné nebo různé. Uvažme: různé kružnice mohou protínati tutéž přímku buď v různých, nebo také týchž dvojicích reálných bodů. Je tedy také na snadě připustiti, že mohou dvě různé kružnice protíti tutéž přímku v téže dvojici immaginárných bodů. Je jen otázka, kdy to nastane.



Obr. 1.

K rozhodnutí této otázky provedeme kvadratickou úlohu, jež pro nás bude míti i jinak zásadní důležitost. Této větě předešleme některé věty pomocné.

8. *Dvě kružnice, jež se protínají kolmo, stanoví na libovolném paprsku, jenž prochází středem jedné kružnice, čtveřinu harmonických bodů.*

Důkaz. Buďtež (obr. 1.) K, K' obě kružnice o středech S, S', p paprsek vedený středem S'. Nechť protne K v bodech A, B; K' v bodech A', B'. Budiž M jeden průsečík obou kružnic; prodlužme MA' a MB' tak, až protnou K po druhé v bodech L, N. Ježto obvodový úhel LMN je pravý, prochází spojnice LN středem S. Ježto obě kružnice se sekou kolmo, je $\sphericalangle S'MS$ pravý; ježto také $\sphericalangle LMB'$ je pravý, je

$$\sphericalangle SML = \sphericalangle S'MB'.$$

Avšak

$$\sphericalangle SLM = \sphericalangle SML$$

a

$$\sphericalangle S'B'M = \sphericalangle S'MB',$$

tedy

$$\sphericalangle SLM = \sphericalangle S'B'M.$$

V pravoúhlém trojúhelníku LMN je

$$\sphericalangle LNM + \sphericalangle SLM = 90^\circ,$$

t. j.

$$\sphericalangle LNM + \sphericalangle S'B'M = 90^\circ,$$

t. j. trojúhelník $B'EN$ pravoúhlý, s pravým úhlem při E.

Je tedy $LN \perp p$ a proto $\widehat{AL} = \widehat{LB}$.

Z toho však plyne

$$\sphericalangle AMA' = \sphericalangle A'MB,$$

t. j. MA' půlí $\sphericalangle AMB$. Avšak $MB' \perp MA'$, tedy půlí, jak známo, MB' úhel vedlejší k $\sphericalangle AMB$.

Jsou tedy MA', MB' obě osy úhlů při M v trojúhelníku ABM, a ty, dle známé věty, protínají základnu v bodech, jež jsou harmonicky sdruženy dle obou vrcholů. Tím je dokázáno, že A, B, A', B' tvoří harmonickou čtveřinu.

Platí také obrácená věta, totiž: *protíná-li kružnice K paprsek p vedený středem kružnice K' ve dvou bodech harmonicky sdružených vzhledem k průsekům p a K, protínají se K a K' kolmo.* Důkaz přenechávám čtenáři.

9. Předpokládali jsme, že K protne p v bodech reálných. Není-li tomu tak, pak K a p se protínají ve dvou immaginárných bodech, touto kružnicí a přímkou určených; zcela důsledně i v tom případě pravíme, že *tyto immaginárné body jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B.*

Jestliže tedy sestrojíme kružnici K' a paprsek p, jejím středem vedený, jenž ji protne v bodech A', B', pak *každá kružnice ke K' kolmá protne p v bodech A, B (reálných nebo immaginárných), jež jsou k A', B' harmonicky sdruženy.*

10. Všechny kružnice mající společnou chordálu, tvoří t. zv. *svazek kružnic.* O tom platí věta:

Všechny kružnice svazku mají své středy na přímce kolmé ke společné chordále.

Víme totiž, že chordála dvou kružnic je kolma ke spojnici jich středů. Jsou-li tedy K_1, K_2 dvě kružnice svazku o středech S_1 S_2, je jich chordála kolma k S_1S_2.

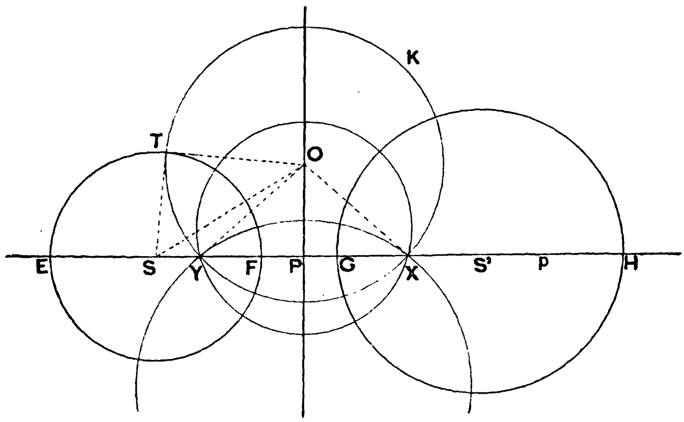
Je-li K_3 další kružnice o středu S_3, je S_1S_3 kolmo k téže chordále, tedy totožno s S_1S_2. Tím je věta dokázána.

Další věta plyne ihned z definice svazku. Je-li P průsek společné chordály a společné centrály, a A, B průseky této centrály s některou kružnicí svazku, pak označme $PA = a$, $PB = b$; potence bodu P vzhledem k této kružnici je $a \cdot b$. Ježto bod P má tutéž potenci vzhledem ke všem kružnicím svazku, je *výraz* $a \cdot b$ *pro všechny kružnice týž.* Ale také naopak: *jestliže na přímce p je dáno nekonečně mnoho dvojic bodů, pro něž platí vztah* $a \cdot b =$ *konst., kde a a b jsu vzdálenosti bodů téže dvojice od pevného bodu P, a sestrojíme-li kružnice, jež mají za průměry úsečky omezené body jednotlivých dvojic, tvoří tyto kružnice svazek.*

Všechny tyto kružnice mají totiž na přímce p své středy a bod P má vzhledem k nim tutéž potenci; kolmice v bodě P na p vztyčená je tedy dle známé konstrukce chordálou každých dvou těchto kružnic; mají tedy všechny tyto kružnice společnou chordálu a tvoří svazek, jak bylo dokázati.

11. *Kružnice, které kolmo sekou dvě kružnice dané, tvoří svazek, jehož společná chordála spojuje středy obou kružnic.*

I. Nechť obě kružnice (obr. 2.) nemají společných reálných bodů. Sestrojíme známým způsobem jejich chordálu. Každý bod chordály O může býti středem kružnice K, sekoucí kolmo obě dané; její poloměr je, jak známo, společná délka tečných z toho bodu k oněm kružnicím vedených. Naopak ovšem každá kružnice sekoucí kolmo obě dané má svůj střed na jejich chordále. Každá tato kružnice pak jistě protne p ve dvou reálných bodech. Neboť průsečík P přímky p a chordály leží uvnitř každé kružnice K. Je totiž poloměr takové kružnice OT dán jako odvěsna trojúhelníka pravoúhlého OTS; naproti tomu je OP odvěsna trojúhelníka OPS, jenž má s oním společnou přeponu. Avšak jedna jeho odvěsna PS je větší než odvěsna TS; je tedy druhá odvěsna OP menší než odvěsna OT, t. j. bod P leží uvnitř kružnice K. a p tedy je sečnou této kružnice. Buďtež X, Y oba průsečíky kružnice K s přímkou p.



Obr. 2.

Nazveme r, r' poloměry kružnic o středech S, S',

$$PO = d,\ PS = y,\ PX = x,\ PS = s,\ PS' = s'.$$

Budiž R poloměr kružnice K. I je (z trojúhel. OTS)

$$R^2 = \overline{OS}^2 - r^2 = d^2 + s^2 - r^2.$$

Avšak $y^2 = R^2 - d^2 = d^2 + s^2 - r^2 - d^2 = s^2 - r^2$.

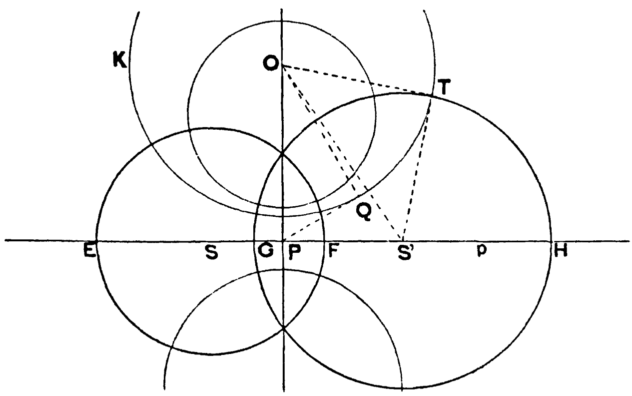
Podobně shledáme $x^2 = s'^2 - r'^2$; a ovšem $x = y$.

Vidíme, že x a y na d nezávisí; jestliže tedy bod O na chordále mění svou polohu, vzdálenosti x, y a tedy body X, Y se nemění, což znamená: *všechny kružnice protínající kolmo obě kružnice dané, protínají p v týchž dvou bodech X, Y, t. j. tvoří svazek.*

II. Nechť se obě kružnice protínají ve dvou reálných bodech (obr. 3). Každá kružnice K sekoucí kolmo obě dané má svůj střed O na chordále obou kružnic. Sestrojíme-li ji (zcela dle předchozího návodu), shledáme, že neprotne paprsku p.

Důkaz toho je zcela obdobný příslušnému důkazu v předchozím provedenému.

Kružnice kolmé k daným tedy vůbec p neprotnou. Avšak všechny tyto kružnice mají touž chordálu, jíž je přímka p. Budiž označení takové, jako prve. Délku tečny z bodu P ke K označme t.



Obr. 3.

Je pak $$t^2 = d^2 - R^2.$$
Avšak $$R^2 = \overline{OS}^2 - r^2 = d^2 + s^2 - r^2,$$
t. j. $$t^2 = r^2 - s^2.$$

To znamená: délka tečné t z bodu P ke každé kružnici K vedené je veličina stálá, t. j. bod P má vzhledem ke všem těmto kružnicím K touž potenci. Avšak středy každých dvou těch kružnic leží na OP; kolmice v bodu P k OP je tedy chordála každých dvou těchto kružnic; a to je právě p. *Tvoří tedy všechny kružnice protínající kolmo obě dané kružnice.*

III. Jak se věta dokáže pro případ, že obě dané kružnice se dotýkají, je ihned patrno z případu I.

12. Nazývejme v dalším svazkem kružnic prvého druhu svazek, jehož kružnice mají dva body společné; svazkem druhého druhu svazek, jehož kružnice se neprotínají.

I lze dokázanou větu doplniti tak: *kružnice sekoucí kolmo dvě kružnice, jež se neprotínají, tvoří svazek prvého druhu*;

kružnice sekoucí kolmo dvě kružnice, jež se protínají, tvoří svazek druhého druhu.

Avšak vidíme dále: obě dané kružnice určují svazek, do něhož samy náleží; každá kružnice, sekoucí kolmo tyto dvě kružnice. seče kolmo všechny kružnice příslušného svazku, jak snadno lze nahlédnouti. Můžeme tedy říci úplněji:

Kružnice sekoucí kolmo všechny kružnice svazku prvého druhu tvoří svazek druhého druhu — a také obráceně.

13. Přistoupíme nyní k provedení úlohy, nahoře ohlášené: *Jest určiti dvojici bodů, jež jsou harmonicky sdruženy se dvěma dvojicemi daných bodů téže přímky.*

Zde nutno rozeznávati dva případy. Je-li E, F jedna dvojice, G, H druhá, pak mohou buď E a F ležeti oba uvnitř úsečky $\overline{GH}$ nebo oba vně této úsečky; pravíme, že E, F a G, H se navzájem neoddělují; anebo leží jeden z obou bodů E, F uvnitř, druhý vně úsečky $\overline{GH}$; v tom případě pravíme, že se obě dvojice navzájem oddělují.

I. Nechť se obě dvojice bodů na paprsku p navzájem neoddělují (v. obr. 2.). Opišme kružnici nad průměrem $\overline{EF}$ a kružnici nad průměrem $\overline{GH}$; jich středy buď též S, S'.

Je-li X, Y libovolná dvojice oddělující harmonicky EF, musí libovolná kružnice body X, Y vedená protnouti kolmo kružnici nad průměrem $\overline{EF}$ (dle odst. 8.). Má-li X, Y oddělovati harmonicky také G, H, musí táž kružnice protínati kolmo také druhou kružnici. Tedy naopak: každá kružnice protínající kolmo obě sestrojené kružnice protíná p v bodech X, Y, jež harmonicky oddělují i E, F i G, H.

Víme však (v. odst. 11. a 12.), že všechny kružnice sekoucí kolmo obě dané tvoří svazek, v tomto případě svazek prvého druhu, t. j. všechny kružnice sekoucí kolmo obě kružnice dané protínají p v týchž dvou bodech X, Y.

Z toho plyne: *existuje jediná dvojice bodů, jež oddělují harmonicky obě dané dvojice.* Jak ji sestrojíme, vysvítá dostatečně z předchozích úvah.

II Nechť se obě dvojice E, F; G, H navzájem oddělují (v. obr. 3.). Opišme nad průměry $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ kružnice o středech S, S'. Je-li X, Y libovolná dvojice, jež harmonicky odděluje

E, F i G, H, musí kružnice jdoucí body X, Y protnouti obě kružnice kolmo. Kružnice kolmo protínající obě dané tvoří svazek, avšak v tomto případě svazek druhého druhu, t. j. žádná tato kružnice neprotíná přímku p v reálných bodech. Z toho tedy negativní výsledek: *neexistuje dvojice reálných bodů, jež by harmonicky oddělovala současně dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují.*

Avšak dle našeho zavedení má každá kružnice svazku s přímkou p společné dva body immaginárné; a *chceme-li naší úloze přisouditi řešení v každém případě* (srv. odst. 5.), musíme pokládati tyto dva immaginárné body za řešení předložené úlohy. Ale poněvadž tato úloha má v případě řešení reálných řešení právě dvě, žádáme, aby i v tomto případě měla právě dvě řešení immaginárná. *I musíme připustiti, že všechny kružnice svazku druhého druhu protínají přímku p v týchž dvou immaginárných bodech sdružených jež jsou tedy harmonicky sdruženy dle obou daných dvojic.*

Tedy výsledek positivní: *existuje jediná dvojice immaginárných bodů sdružených, jež oddělují harmonicky dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují.* Za sestrojenou pokládáme tuto dvojici, jakmile je sestrojena jedna kružnice sekoucí kolmo obě kružnice sestrojené nad průměry $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.

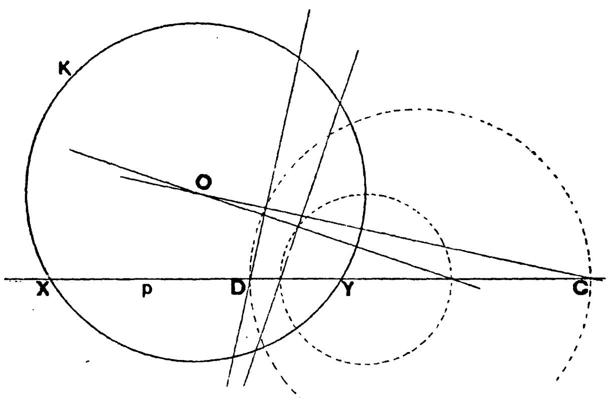
Zároveň jsme dospěli k dalšímu výsledku: jako všechny kružnice svazku prvého druhu mají společné dva reálné body na chordále, tak musíme připustiti, že i všechny kružnice svazku druhého druhu mají společné právě dva immaginárné body sdružené ležící na chordále.

K dřívější větě (v. odst. 4.), kterou jsme zavedli immaginárné body, přistupuje nyní věta druhá: *dvojice immaginárných bodů sdružených jsou totožné, jsou-li vytínány na téže přímce kružnicemi téhož svazku, jenž má tuto přímku za společnou chordálu.* Z toho ihned plyne: dvě kružnice, které se neprotínají v bodech reálných, protínají se ve dvojici immaginárných bodů sdružených, které leží na chordále těchto kružnic. Sestrojením chordály pokládáme také oba immaginárné průsečíky za sestrojené.

14. Ještě jeden výsledek odvodíme z předchozích úvah. Dvojice X, Y (ať reálná nebo immaginárná), jež je harmonicky

sdružena vzhledem k dvojicím E, F; G, H, je harmonicky sdružena také ke všem dvojicím bodovým, jež na p vytínají kružnice svazku, určeného oběma kružnicemi o středech S, S'. To plyne ihned z vět v odst. 11. a 8. a ze způsobu, jak dvojice X, Y byla sestrojena.

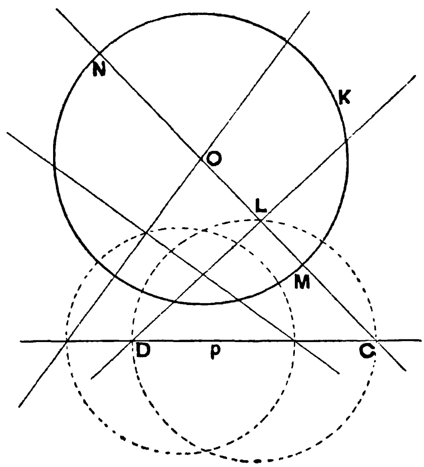
Můžeme patrně vysloviti větu: *všechny kružnice sekoucí kolmo kružnice daného svazku tvoří také svazek, jehož společné body leží na spojnici středů kružnic prvého svazku a oddělují harmonicky všechny dvojice bodové vytínané na této přímce kružnicemi prvého svazku.*



Obr. 4.

15. Předchozí úloha se nám objasní ještě s jiné stránky, přibereme-li v úvahu polární vlastnosti kružnice. Budiž dána kružnice K, jež protíná přímku p v bodech reálných X, Y. Zvolme na p libovolný bod C a sestrojme k němu poláru vzhledem ke kružnici; ta nechť protne p v bodu D. Nazveme *C, D dvojicí bodů polárně sdružených vzhledem ke kružnici.* Je pak ihned patrno, vzhledem k známé harmonické vlastnosti poláry, že průseky X, Y jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke všem polárně sdruženým dvojicím bodovým na p, a že tedy kružnice sestrojená nad průměrem $\overline{CD}$ seče kružnici K kolmo (v. obr. 4.).

Nechť za druhé protíná kružnice K v středu O přímku p v bodech immaginárných. Sestrojme zase na p jednu dvojici polárně sdružených bodů C, D a kružnici nad průměrem CD (v. obr. 5.). Tato kružnice prochází z pochopitelného důvodu



Obr. 5.

průsekem L spojnice CO a poláry bodu C, který leží uvnitř K (ježto C leží vně), i protínají se obě kružnice ve dvou reálných bodech. Jsou-li pak M, N průsečíky spojnice CO a kružnice K, víme, že C, L; M, N jsou dvojice harmonicky se oddělující. Ale z toho plyne (dle věty z odst. 8.), že obě kružnice se sekou kolmo.

Sestrojíme-li kružnici, jež je s K dle p souměrná, protíná kružnice nad $\overline{CD}$ i tuto kolmo; a tak každá kružnice, sestrojená nad průměrem, jehož koncové body tvoří dvojici polárně sdružených bodů. Všechny tyto kružnice tedy tvoří svazek. Ale vedle toho: kružnice K každou kružnici tohoto svazku protíná kolmo, a tedy (v. odst. 13.) její immaginárné průsečíky s p oddělují harmonicky každou dvojici C, D.

Z toho tedy plyne věta: *průseky kružnice s přímkou oddělují harmonicky všechny dvojice polárně sdružených bodů na p, ať jsou tyto průseky reálné nebo immaginárné.*