Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Graf

O jistém systému isothermických ploch kuželových a jemu na základě stereografické projekce odpovídajícím potenciálu rovinném

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 3, 275--282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122983

O jistém systému isothermických ploch kuželových a jemu na základě stereografické projekce odpovídajícím potenciálu rovinném.

Napsal Ph. Dr. **František Graf** v Praze.

K dané přímce v prostoru sestrojíme vzhledem ke kouli o středu O a poloměru 1 sdruženou poláru. Jsou-li P_i $(x_i\, y_i\, z_i)$ $i = 1, 2$ průsečíky dané přímky s koulí, protíná sdružená polára plochu tuto v bodech Π_i $(\xi_i\, \eta_i\, \zeta_i)$, daných rovnicemi:

$$\xi_{1,2} = \frac{x_1 + x_2 + i\,(yz)}{2\cos^2\frac{s}{2}} \text{ etc.,}$$

kde $i = \sqrt{-1}$ a (yz) značí determinant $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ a obdobně pro η_{12} a ζ_{12}. Dále značí s úhel směrů OP_1 a OP_2. Pak lze přímku P_1P_2 též definovati co osu svazu rovin:

$$E_1 + \mu E = 0,$$
$$E_i \equiv \xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z - 1 = 0,$$

při čemž, jak zřejmo, E_i značí polární rovinu bodu Π_i. Analogicky jest přímka $\Pi_1\Pi_2$ osou svazu rovin:

$$E_1 + \lambda E_2 = 0,$$
$$E_i \equiv x_i\xi + y_i\eta + z_i\zeta - 1 = 0$$

a E_i jest polární rovinou bodu P_i. Parametry λ a μ lze interpretovati jako poměr vzdáleností od základních rovin, násobený libovolnou stálou. Protneme-li kouli O rovinou λ a položíme-li povstalým kruhem kužel, jehož vrchol nalézá se ve středu koule, bude rovnice jeho:

$$\lambda = -\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{xx_2 + yy_2 + zz_2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a analogickou rovnici obdržíme pro kužel, procházející průsekem roviny μ s koulí O.

Připojíme-li k tomu systém ploch kulových:

$$\nu = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r,$$

jest soustava $\lambda\mu\nu$ orthogonální, neboť jest:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0.$$

Že ostatně λ a μ representují kužele, poznáme ihned, učiníme-li je racionálními; jsou homogenní a Eulerův theorem pro první derivace není nic jiného než differenciální rovnice ploch kuželových. Jedná se nyní o to, zda soustavy $\lambda=c$ a $\mu=c$ jsou isothermickými. Dle kriteria Lamé-ova:

$$-\frac{dlg\dfrac{dV}{d\lambda}}{d\lambda}=\frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

vyplývá pro parametr λ:

$$\frac{r\,(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)-(E_1+1)-\lambda\,(E_2+1)+\lambda r}{(1+\lambda)\,[r-(E_1+1)-\lambda\,(E_2+1]+\lambda r\,[(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)+\lambda]}$$

a jest tedy tento výraz jistě pouhou funkcí parametru λ, je-li

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=1,$$

což značí, že body P_1, P_2 na kouli koincidují, jich spojnice je tečnou koule. Konjugovaná polára jest dána tečnou v témže bodě, stojící na prvé kolmo. Než parametr λ nehodí se více k našemu účelu, stáváť se veličinou stálou, neboť základní roviny svazu jsou identické. Představme si tedy, že bod P_2 blíží se bodu P_1 na kouli určitým směrem. Proložme touto tečnou a bodem O rovinu s úhly odklonu $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ a volme tuto a rovinu tečnou v bodě P_1 za základní útvary nového svazu. Svaz rovin μ má pak za osu tečnu o směru $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ a rovnice těchto nových svazů jsou:

$$\alpha_1 x+\ \beta_1 y+\ \gamma_1 z+\lambda\,(xx_1+yy_1+zz_1-1)\equiv A+T\lambda=0,$$
$$(\beta z)\,x+(\gamma x)\,y+(\alpha y)\,z+\mu\,(xx_1+yy_1+zz_1-1)\equiv B+T\mu=0,$$

Proložíme-li průseky rovin těchto s koulí kužele s vrcholem O, isou tyto dány rovnicemi:

$$\lambda=\frac{A}{r-(T+1)}\quad \mu=\frac{B}{r-(T+1)}$$

a oba systémy jsou isothermické. Volíme-li za parametr veličinu λ, seznáme, že $\varDelta\lambda = 0$ a tudíž

$$V = c\lambda + c'.$$

Nás ovšem nejvíce zajímá průběh ploch equipotenciálních aneb spád potenciálu ve směru silokřivek. Značí-li n normálu kužele λ, bude

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{dV}{d\lambda}\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

$$= \frac{c\lambda}{A} = \frac{c\lambda}{r \cos \omega},$$

je-li ω úhel mezi průvodičem r pohyblivého bodu a daným směrem $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$. Tato jednoduchá rovnice poučí nás o singularitách potenciálu V.

Chci jen krátce uvésti, že tento systém ploch lze též obdržeti z rovnice potenciálu, psané v souřadnicích polárních, nezávisí-li V od průvodiče. V tomto případě jest totiž:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0,$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \; y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

$$\varphi = lg\, tg \frac{\vartheta}{2}$$

a dosadíme-li za V funkci komplexní proměnné:

$$Ce^{\varphi + i\psi},$$

značí reelní část jeden systém kuželů, kdežto koefficient imaginární jednotky dá soustavu orthogonální.

Poněvadž poloha bodu P_1 jest irrelevantní pro všeobecnost naší úvahy následkem naprosté symmetrie koule, volme

$$x_1 = -1, \; y_1 = z_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 0, \; \gamma_1 = 1.$$

Pak jest:

$$T = -(x + 1), \quad A = z, \quad B = -y,$$

$$\lambda = \frac{z}{r + x}, \quad \mu = \frac{-y}{r + x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{cz}{r + x} \cdot \frac{1}{r \cos (rZ)} = \frac{c\lambda}{r \cos (rZ)}$$

a pro plochu koule:

$$\lambda = \frac{z}{1 + x}.$$

Seznáme tedy, co znamená λ pro určitý kužel; tato poslední rovnice značí svaz paprsků v rovině XZ se středem P_1 $(-1, 0)$, λ jest tangenta odklonu roviny λ k rovině XY a kužel λ prochází průsekem této roviny s koulí. Otočením rovin λ kol osy X o $\frac{\pi}{2}$ vzniknou roviny μ.

Všechny plochy kuželové dotýkají se vzájemně dle povrchové přímky $O, y = -\infty$ a jich společným vrcholem jest střed koule O. Potenciál V není regulární funkcí v nekonečnu; mluvíme-li o nekonečnu ve smyslu zrcadlení na kouli jako o jediném bodu, lze říci, že funkce V má v bodě O a v nekonečnu podstatně singulární body, ve kterých nabývá všech hodnot mezi $\pm\infty$. K tomu přistupuje singulární přímka $O, y = -\infty$; podél celé této přímky není V funkcí jednoznačnou. Stanovíme-li však, že každému směru v prostoru odpovídá bod nekonečně vzdálené roviny, zůstává V v bodě O a v nekonečnu funkcí jednoznačnou, blížíme-li se k těmto bodům na některé z ∞^2 povrchových přímek, vyjma singulární přímku S. Jak pro nekonečně velké, tak pro nekonečně malé r plyne totiž z rovnice pro λ

$$\lambda = \frac{\frac{z}{r}}{1 + \frac{x}{r}}$$

a jest tedy tato limita určitou.

Pro bod singulární přímky S nabývá V jen tehdy určité hodnoty, blížíme-li se mu na plášti určitého kužele. Protíná-li však křivka, kterou opisuje pohyblivý bod, plochy kuželové, můžeme i průseku této křivky s S přidružiti dle zákona kontinuity hodnotu $\pm\infty$, ježto kužel $\pm\infty$ prochází tímto bodem; blíží-li se však pohyblivý bod danému bodu přímky S směrem opačným, má též nekonečná limita opačné znaménko. Pohyb na přímce S vede v každém bodě k limitě neurčité.

Co se první derivace potenciálu dle normály týče, jest tato

$$\frac{c}{r + x},$$

tedy nekonečnou prvého řádu pro nekonečně malé r, což je samozřejmo, ježto se zde všechny plochy setkávají, totéž platí pro přímku S, kde ∂n stává se též nekonečně malým. V každém jiném bodě prostoru zůstává $\frac{\partial V}{\partial n}$ určitým a konečným.

Pozorujme nyní rovinný potenciál, náležející k jednomu z obou orthogonálních systémů kruhů, jež vznikají stereografickou projekcí kruhů λ a μ na rovinu XY a nic v případě prvém, kde body P_1 a P_2 nekoincidují. Bodu P_i odpovídá v rovině XY bod X_i, Y_i, bodu Π_i pak Ξ_i, H_i. Substitucí stereografické projekce obdržíme:

$$\lambda = -\frac{z_1 - 1}{z_2 - 1} \frac{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$$

$$\mu = -\frac{\zeta_1 - 1}{\zeta_2 - 1} \frac{(X - \Xi_1)^2 + (Y - H_1)^2}{(X - \Xi_2)^2 + (Y - H_2)^2}$$

a užijeme-li opět pro rovinu malých písmen a konstanty pojmeme do parametrů:

$$\lambda = \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \quad \mu = \frac{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2}{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2}$$

První rovnice značí systém kruhů s nullovými body

$$P_1\,(x_1 y_1) \text{ a } P_2\,(x_2 y_2),$$

druhá pak jich orthogonální trajektorie s nullovými body

$$\Pi_1\,(\xi_1 \eta_1) \text{ a } \Pi_2\,(\xi_2 \eta_2).$$

Relace mezi souřadnicemi objeví se pro rovinu ve formě:

$$\xi_{12} = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm i\,\frac{y_1 - y_2}{2}, \quad \eta_{12} = \frac{y_1 + y_2}{2} \mp i\,\frac{x_1 - x_2}{2}$$

a jsou obapolné vzhledem k dvojicím $x_i y_i$ a $\xi_i \eta_i$; nullové kruhy svazku jednoho jsou základními body svazku druhého. Tento vztah bodů nullových a základních odpovídá tudíž průsekům sdružených polár na kouli. Volíme-li opět λ a μ za parametry, obdržíme na základě Lamé-ova kriteria:

$$U = C\,lg\,\lambda + C' \qquad V = D\,lg\,\mu + D',$$

kde C a D značí konstanty a $\Delta U = \Delta V = 0$; lze tedy výrazy tyto interpretovati jako koefficienty reelní a imaginární jednotky jisté funkce komplexní proměnné $z = x + iy$. Tvoříme-li na př. $\frac{\partial U}{\partial x}$ a integrujeme částečně dle y, obdržíme cyklometrickou funkci, totiž *arc tg*, ve kterou možno však V lehce proměniti; rozložíme-li čítatele a jmenovatele zlomku μ v komplexní faktory a vyjádříme-li, což lze nadmíru snadno, ξ_i a η_i souřadnicemi x_i a y_i, seznáme, že

$$w = U + iV = lg\,\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

položíme-li $C = D = \frac{1}{2}$, $z_i = x_i + iy_i$; w jest ovšem určeno až na additivní konstantu.

Jsou-li U a V potenciály rychlosti dvou konjugovaných stationárních proudů v rovině XY*) a jsou-li body P reelní, má v těchto bodech proud $V = c$ prameny, jichž vydatnost dána je residuem těchto bodů, děleným i, tedy $\pm 2\pi$. Proud sdružený má zde pak body vírové.

Tyto body jsou opět podstatnými singularitami potenciálu V, který stává se funkcí jednoznačnou, usneseme-li, že pohyblivý bod nesmí překročiti jisté řezy v rovině XY ku př. spojnici $P_1 P_2$, čímž odstraníme mnohoznačnost této funkce následkem periodicity. Jinak bychom musili ve smyslu Riemannově nad rovinou z supraponovati nekonečně mnoho listů plochy. Pohyb uvedený jest dostatečně znám z hydrodynamiky, pročež se jím nechceme déle zabývati.

Tážeme se opět, co stane se s potenciály U a V, splynou-li body P_1 a P_2. Parametry stanou se opět nepotřebnými. Píšeme-li však w ve formě integrálu:

$$(z_1 - z_2)\int \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

*) Cf. F. Klein, Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen.

jest to Abelův integrál třetího druhu vedený dle křivky

$$w^2 - (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

(w značí zde koordinatu) která jest rodu nulltého; pro všeobecnou křivku $f(w^\mu, z^\nu) = 0$ zní totiž integrál třetího druhu s log. nekonečnostmi v bodech z_1 a z_2 ve formě nehomogenní:

$$\int \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial w}} \frac{\varphi_{n-2}}{\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w \\ z_1 & z_2 & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = c \int \frac{dz}{w^2}$$

kde n jest exponent rovnice v homogenní formě a $\varphi = 0$ prochází singulárními body; zde však redukuje se na stálou. Blíží-li se bod z_2 bodu z_1, stává se z rovnice sekanty, jež objevuje se ve jmenovateli co determinant, rovnice tečny a z integrálu logarithmického algebraický integrál rodu druhého, totiž

$$c \int \frac{d_2}{(z - z_1)^2}$$

a položíme-li $c = -2a$, $z_1 = 0$:

$$U = \frac{2ax}{x^2 + y^2} \qquad V = \frac{-2ay}{x^2 + y^2}.$$

Radius kruhu U jest $\frac{a}{U}$; označíme-li tedy vzdálenost bodu roviny od středu příslušného kruhu r, bude

$$U = \pm \frac{a}{r}.$$

Logarithmický potenciál U rovná se tudíž Newtonovu potenciálu hmoty a ve středu pohyblivého kruhu; v nekonečnu je U funkcí regulární. Střed koordinat jest opět podstatnou singularitou a spád potenciálu obnáší:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \pm \frac{2a}{r^2}.$$

Kdybychom mohli realisovati rovnováhu fluida, jež podléhá zákonu potenciálu rovinného ve stavu rovnováhy, musili bychom ovšem povrch rovinného konduktoru utvořit ze dvou kruhů U, jichž středy leží na opačných stranách osy Y. Na vodiči o poloměru $+ r_1$ (střed má positivní abscissu) budiž potenciál U_1, pak jest pro $r = - r_2$ potenciál určen rovnicí.

$$U_1 r_1 = a = U_2 r_2$$

a U_2 má hodnotu zápornou. Hutnost fluida má v tečném bodu na každém z konduktorů opáčně nekonečnou hodnotu, neboť solenoidy končí na povrchu obou vodičů; celková quantita fluida jest nullou, pročež též logarithmický potenciál v nekonečnu rovná se nulle.

O tak zvaných galvanomagnetických a thermomagnetických effektech a elektromotorických silách magnetisace.

Sepsal Dr. **Václav Posejpal**, professor na Kr. Vinohradech.

(Pokračování.)

§ 4. Methodicky jest výhodnější přihlížeti raději k liniím ekvipotenciálním než k vláknům proudovým. Za nepřítomnosti magnetického pole jsou tyto linie přímky rovnoběžné s kratší stranou obdélníkového proužku. Vznik Hallova proudu jeví se pak jako důsledek stočení těchto ekvipotenciálních linií způsobeného účinkem magnetického pole. Z následujícího obrázku (obr. 1.), jenž reprodukuje poměry pro lístek pozlátkový, vidíme, že toto stáčení linií ekvipotenciálních závisí toliko na směru magnetického pole, ne však na směru primárního proudu. Pole jde kolmo na papír tak, že jedna cívka elektromagnetu jest před papírem, druhá za papírem. Směr magnetujícího proudu jest udán pro diváka, jenž stojí před papírem. Vidíme, že v případech a a b před papírem jest pól severní, v případech c a d pól jižní Jest pak u pozlátka směr otočení ekvipotenciálních linií *protivný* ku směru magnetujícího proudu.

§ 5. Pracemi četných fysiků, kteří s Hallovým effektem se zabývali a z nichž zvláště sluší uvésti jména: Roiti (14), Righi (15), Bidwell (16), Leduc (9), v. Ettingshausen a Nernst