Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [XII.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 3, 258--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122981

Geom. místo bodu l jest však k L' affinní, o_3 a O_1 jsou sdružené body a N, nárysná stopa roviny ϱ, jest příslušná osa affinity. I patrno z toho, že hledaný meridián L vyplněný body l jest kuželosečka o ose O a hledaná rotační plocha nepřímkovou plochou 2. stupně.

Tvar křivky meridiánové závisí pouze od trojúhelníka $1'2'3'$, jehož strany jsou přímky A_2, B_2, ϱ_3. (V obr. 2. bod $3'$ je úběžný, ježto $B_2 \parallel \varrho_3$.) Úhel sevřený přímkami $A_2 B_2$ buď roven 2α a odchylka osy O od roviny ϱ, jevící se v úhlu přímek $B_2 \varrho_3$, buď rovna β. Z obr. 2. patrno, že pro $\alpha > \beta$ vytváří se rotač. ellipsoid. Týž přechází v kouli, hoví-li úhly α a β rovnici

$$tg\, \alpha = \frac{2}{\sin 2\beta}, \tag{1}$$

neboť pak body $1, 2, 3$ sdružené k $1'2'3'$ v prve uvažované affinitě leží na kružnici. Je-li β menší než kořen β_0 rovnice (1) — pro dané α — vytváří se ellipsoid vejčitý, pro $\beta > \beta_0$ ellipsoid sploštělý.

Je-li konečně $\alpha < \beta$, vytváří se uvažovanou rotací dvojdílný hyperboloid a pro $\alpha = \beta$ paraboloid, kterýž případ v obr. 2. nakreslen.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Reciprokální soustava vektorů. Soustava vektorů $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$, daných vzorci (163[a]), slove *soustavou reciprokální* ku $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Sluší připomenouti, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nesmí býti konplanární; kdyby totiž vektory ty byly konplanární, rovnal by se společný jmenovatel zlomků na pravé straně vzorců (163[a]) nulle, ježto hodnota skalárního součinu tří konplanárních vektorů jest nulla.

O soustavě vektorů $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$, reciprokálních k vektorům $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, lze dokázati tyto věty:

1. Skalární součiny souhlasných vektorů obou soustav rovnají se jednotce. skalární součiny nesouhlasných vektorů rovny jsou nulle; t. j.

$$\mathfrak{a}^{-1} . \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1} . \mathfrak{b} = \mathfrak{c}^{-1} . \mathfrak{c} = 1 \tag{165}$$
$$\mathfrak{a}^{-1} . \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1} . \mathfrak{c} = \mathfrak{b}^{-1} . \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1} . \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{-1} . \mathfrak{a} = \mathfrak{c}^{-1} . \mathfrak{b} = 0.$$

Neboť

$$\mathfrak{a}^{-1} . \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}{(\mathfrak{abc})} . \mathfrak{a} = \frac{[\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}] . \mathfrak{a}}{(\mathfrak{abc})} = \frac{(\mathfrak{bca})}{(\mathfrak{abc})} = 1,$$

ježto

$$(\mathfrak{bca}) = - (\mathfrak{bac}) = (\mathfrak{abc});$$

podobně jest

$$\mathfrak{a}^{-1} . \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}{(\mathfrak{abc})} . \mathfrak{b} = \frac{[\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}] . \mathfrak{b}}{(\mathfrak{abc})} = \frac{0}{(\mathfrak{abc})} = 0.$$

2. I věta převratná platí: Vyhovují-li dvě soustavy vektorů $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ podmínkám

$$\mathfrak{a}' . \mathfrak{a} = \mathfrak{b}' . \mathfrak{b} = \mathfrak{c}' . \mathfrak{c} = 1,$$
$$\mathfrak{a}' . \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' . \mathfrak{c} = \mathfrak{b}' . \mathfrak{a} = \mathfrak{b}' . \mathfrak{c} = \mathfrak{c}' . \mathfrak{a} = \mathfrak{c}' . \mathfrak{b} = 0,$$

jest soustava $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ reciprokální k soustavě $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Dle rovnice (164^a) lze totiž psáti

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'\mathrm{I} = \mathfrak{a}' . \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a}' . \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} + \mathfrak{a}' . \mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1}$$

čili dle (20^b)

$$\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' . \mathfrak{a})\, \mathfrak{a}^{-1} + (\mathfrak{a}' . \mathfrak{b})\, \mathfrak{b}^{-1} + (\mathfrak{a}' . \mathfrak{c})\, \mathfrak{c}^{-1},$$

a podobně

$$\mathfrak{b}' = (\mathfrak{b}' . \mathfrak{a})\, \mathfrak{a}^{-1} + (\mathfrak{b}' . \mathfrak{b})\, \mathfrak{b}^{-1} + (\mathfrak{b}' . \mathfrak{c})\, \mathfrak{c}^{-1},$$
$$\mathfrak{c}' = (\mathfrak{c}' . \mathfrak{a})\, \mathfrak{a}^{-1} + (\mathfrak{c}' . \mathfrak{b})\, \mathfrak{b}^{-1} + (\mathfrak{c}' . \mathfrak{c})\, \mathfrak{c}^{-1}.$$

Vložíme-li do těchto rovnic na pravých stranách za skalární součiny hodnoty, plynoucí z rovnic podmínečných, nabudeme $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}^{-1}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}^{-1}$.

Jsou tedy rovnice (165) postačujícími podmínkami, aby soustava vektorů $\mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{b}^{-1}$, $\mathfrak{c}^{-1}$ byla reciprokální k soustavě $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

3. Rovnice (165) jsou souměrné vzhledem k $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{b}^{-1}$, $\mathfrak{c}^{-1}$; z toho vychází, že soustavu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ můžeme pokládati za soustavu reciprokální k $\mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{b}^{-1}$, $\mathfrak{c}^{-1}$ právě tak,

jako jest soustava $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$ reciprokální k $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Tudíž platí věta:

Tvoří-li $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$ reciprokální soustavu k $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, jest $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ soustavou reciprokální k $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$. Lze tudíž psáti:

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{b}^{-1}\times\mathbf{c}^{-1}}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})},\quad \mathbf{b}=\frac{\mathbf{c}^{-1}\times\mathbf{a}^{-1}}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})},\quad \mathbf{c}=\frac{\mathbf{a}^{-1}\times\mathbf{b}^{-1}}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})} \qquad (163^{b})$$

4. Skalární součiny dvou reciprokálních soustav vyhovují rovnici

$$(\mathbf{abc})\,(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})=1. \qquad (166)$$

Neboť

$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})=\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{(\mathbf{abc})}\ \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{(\mathbf{abc})}\ \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{(\mathbf{abc})}\right)$$
$$=\frac{1}{(\mathbf{abc})^3}\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\quad \mathbf{c}\times\mathbf{a}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}\right);$$

avšak

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\quad \mathbf{c}\times\mathbf{a}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b})=[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]\,.\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}],$$

kde na pravé straně dle (18^{b})

$$[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]=(\mathbf{bca})\,\mathbf{c}-(\mathbf{bcc})\,\mathbf{a}.$$

Ježto $(\mathbf{bcc})=0$, bude

$$[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]=(\mathbf{bca})\,\mathbf{c}=-(\mathbf{bac})\,\mathbf{c}=(\mathbf{abc})\,\mathbf{c}$$

a
$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\quad \mathbf{c}\times\mathbf{a}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{abc})\,\mathbf{c}\,.\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}];$$

dle (14) jest

$$\mathbf{c}\,.\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=(\mathbf{cab})=-(\mathbf{acb})=(\mathbf{abc}),$$

pročež

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\quad \mathbf{c}\times\mathbf{a}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{abc})^2.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do posledního výrazu pro $(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})$, dostaneme

$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})=\frac{(\mathbf{abc})^2}{(\mathbf{abc})^3}=\frac{1}{(\mathbf{abc})},$$

čímž rovnice (166) jest dokázána.

Jest zřejmo, že, vyhledáme-li dle rovnice (163^{a}) k soustavě tří jednotkových vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, k sobě vzájemně kolmých, soustavu reciprokální i^{-1}, j^{-1}, k^{-1}, obdržíme, přihlížejíce ke vzorcům (10) a k rovnici $(ijk) = 1$, hodnoty:

$$i^{-1} = \frac{j \times k}{(ijk)} = i, \quad j^{-1} = \frac{k \times i}{(ijk)} = j, \quad k^{-1} = \frac{i \times j}{(ijk)} = k.$$

Reciprokální soustavou k vektorům **i**, **j**, **k** jest tedy táž soustava **i**, **j**, **k**. Z toho poznáváme, že hodnota idemfaktoru

$$I = ii + jj + kk$$

jest jenom zvláštním případem obecnějších hodnot (164^a) neb (164^b) pro tento dyadický mnohočlen *).

Dyadické mnohočleny reciprokální. Pojmu idemfaktoru můžeme nyní užíti, abychom definovali dyadické mnohočleny *reciprokální.* Zoveme tak mnohočleny (úplné) Φ a Ψ, jichž skalární součin $\Phi . \Psi$ rovná se idemfaktoru. Je-li

$$\Phi . \Psi = I \text{ **)},$$

*) *Jaumann* ve svém spise »Die Grundlagen der Bewegungslehre« uvádí jednotkovou dyadu ve formě

$$I = m_1 ; m_1 - m_1 \underset{;}{\times} m_1$$

značí-li m_1 vektor libovolného běhu, jehož velikost $= 1$.

Ježto totiž $m_1 . m_1 = 1$, jest pro jakýkoli vektor

$$r = (m_1 . m_1) r;$$

položíme-li ve vzorci (16^b) místo **a**, **b**, **c** po řadě m_1, m_1, **r**, obdržíme

$$m_1 \times [m_1 \times r] = (m_1 . r) m_1 - (m_1 . m_1) r,$$

z čehož plyne

$$(m_1 . m_1) r = (m_1 . r) m_1 - m_1 \times [m_1 \times r] = r.$$

Jest však dle vzorce (148^a)

$$(m_1 . r) m_1 = m_1 (m_1 . r) = (m_1 ; m_1) . r$$

a dle vzorce (149^a) $\quad m_1 \times [m_1 \times r] = [m_1 \underset{;}{\times} m] . r;$

pročež

$$r = (m_1 ; m_1 - m_1 \underset{;}{\times} m_1) . r.$$

Jelikož též

$$r = I . r,$$

jest

$$I = m_1 ; m_1 - m_1 \underset{;}{\times} m_1.$$

**) Podotknouti sluší, že v tom případě také $\Psi . \Phi = I$. Ježto totiž

$$r . (\Phi . \Psi) = r . I = r,$$

bude

$$r . (\Phi . \Psi) . \Phi = r . \Phi;$$

píšeme

$$\Phi = \frac{\mathbf{I}}{\Psi} = \Psi^{-1} \text{ a } \Psi = \frac{\mathbf{I}}{\Phi} = \Phi^{-1}. \tag{167}$$

I jest pak mnohočlen Ψ jaksi zvratnou hodnotou mnohočlenu Φ a naopak.

Na tom základě můžeme dále podati definici (analogickou k definici podílu dvou vektorů) podílu (dyadického) dvou dyadických mnohočlenů; jest to součin (dyadický) dělence se zvratnou hodnotou dělitele, tedy

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \Phi \frac{\mathbf{I}}{\Psi} = \Phi \Psi^{-1}. \tag{168}$$

Je-li dán mnohočlen Φ ve tvaru

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn},$$

obdržíme pro mnohočlen s ním reciprokální Φ^{-1} hodnotu

$$\Phi^{-1} = \mathbf{l}^{-1}\mathbf{a}^{-1} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{b}^{-1} + \mathbf{n}^{-1}\mathbf{c}^{-1}.$$

Neboť užijeme-li vzorců (153) a (165), nabudeme

$$(\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}) \, . \, (\mathbf{l}^{-1}\mathbf{a}^{-1} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{b}^{-1} + \mathbf{n}^{-1}\mathbf{c}^{-1})$$
$$= \mathbf{aa}^{-1} + \mathbf{bb}^{-1} + \mathbf{cc}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Věty o sdružených a reciprokálních mnohočlenech. O mnohočlenech sdružených a reciprokálních k daným mnohočlenům dyadickým platí mnohé poučky, z nichž některé tuto uvedeme:

1. Rovnají-li se sobě dva dyadické mnohočleny, jsou si rovny i jejich sdružené i jejich reciprokální mnohočleny. Je-li tedy $\Phi = \Psi$, jest též

$$\Phi_C = \Psi_C \text{ a } \Phi^{-1} = \Psi^{-1}.$$

První část této věty dokážeme snadno, použijeme-li vzorce (157) a známé definice (158) o rovnosti dvou dyad.

---

ale pro součin na levé straně, který začíná vektorem **r**, platí associativnost; tudíž

$$\mathbf{r} \, . \, (\Phi \, . \, \Psi) \, . \, \Phi = (\mathbf{r} \, . \, \Phi) \, . \, (\Psi \, . \, \Phi) = \mathbf{r} \, . \, \Phi;$$

z toho plyne vzhledem k vzorci (82a), který můžeme psáti $(\mathbf{r} . \Phi) . \mathbf{I} = \mathbf{r} . \Phi$

$$\Psi \, . \, \Phi = \mathbf{I}.$$

Tudíž součin dvou reciprokálních mnohočlenů jest kommutativní.

Co se druhé části týče, jest především

$$\Phi \,.\, \Phi^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \Psi \,.\, \Psi^{-1} = \mathbf{I},$$

z čehož plyne

$$\Phi \,.\, \Phi^{-1} = \Psi \,.\, \Psi^{-1}.$$

Jelikož dle podmínky $\Phi = \Psi$, jest též

$$\Phi \,.\, \Phi^{-1} = \Phi \,.\, \Psi^{-1},$$

a tudíž i

$$\Phi^{-1} \,.\, (\Phi \,.\, \Phi^{-1}) = \Phi^{-1} \,.\, (\Phi \,.\, \Psi^{-1}).$$

Avšak součiny tří dyadických mnohočlenů jsou associativní, pročež můžeme poslední rovnici též psáti

$$(\Phi^{-1} \,.\, \Phi) \,.\, \Phi^{-1} = (\Phi^{-1} \,.\, \Phi) \,.\, \Psi^{-1}$$

čili

$$\mathbf{I} \,.\, \Phi^{-1} = \mathbf{I} \,.\, \Psi^{-1}$$

a konečně

$$\Phi^{-1} = \Psi^{-1}.$$

2. Dyadický mnohočlen, sdružený k součtu nebo rozdílu dvou dyadických mnohočlenů, rovná se součtu nebo rozdílu mnohočlenů sdružených k jednotlivým sčítancům. Tudíž

$$(\Phi + \Psi)_C = \Phi_C + \Psi_C. \tag{169}$$

Věta tato, kterou netřeba zvlášť dokazovati, platí i pro libovolný počet sčítanců.

3. Dyadický mnohočlen, sdružený ke skalárnímu součinu dvou daných mnohočlenů, rovná se skalárnímu součinu mnohočlenů sdružených k jednotlivým činitelům, v němž pořádek násobence a násobitele jest zaměněn.

$$(\Phi \,.\, \Psi)_C = \Psi_C \,.\, \Phi_C. \tag{170}$$

Důkaz. Větu tuto dokážeme, ukážeme-li, že pro libovolné $\mathbf{r}$ platí

$$(\Phi \,.\, \Psi)_C \,.\, \mathbf{r} = (\Psi_C \,.\, \Phi_C) \,.\, \mathbf{r}.$$

Dle vzorce (157) jest

$$(\Phi \,.\, \Psi)_C \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{r} \,.\, (\Phi \,.\, \Psi) = (\mathbf{r} \,.\, \Phi) \,.\, \Psi,$$

ježto vektor $\mathbf{r}$ stojí na počátku součinu. Avšak

$$(\mathbf{r} \,.\, \Phi) \,.\, \Psi = \Psi_C \,.\, (\mathbf{r} \,.\, \Phi);$$

položíme-li na pravé straně $\Phi_C \,.\, \mathbf{r}$ místo $\mathbf{r} \,.\, \Phi$, vychází

$$(\Phi \,.\, \Psi)_C \,.\, \mathbf{r} = \Psi_C \,.\, (\Phi_C \,.\, \mathbf{r}) = (\Psi_C \,.\, \Phi_C) \,.\, \mathbf{r},$$

z čehož plyne

$$(\Phi \,.\, \Psi)_C = \Psi_C \,.\, \Phi_C.$$

4. Z tohoto vzorce, jehož platnost lze rozšířiti na libovolný počet činitelů, vyplývá

$$(\Phi^n)_C = (\Phi_C)^n, \tag{171}$$

místo čehož píšeme kratčeji Φ^n_C. Tudíž:

Dyadický mnohočlen, sdružený k n-té mocnosti daného mnohočlenu Φ, rovná se n-té mocnosti mnohočlenu sdruženého k Φ.

5. Dyadický mnohočlen, reciprokální se skalárním součinem dvou daných mnohočlenů, rovná se skalárnímu součinu mnohočlenů reciprokálních s jednotlivými činiteli, v němž pořádek násobence a násobitele jest zaměněn

$$(\Phi \,.\, \Psi)^{-1} = \Psi^{-1} \,.\, \Phi^{-1}. \tag{172}$$

Důkaz. Abychom tuto větu dokázali, ukažme, že součiny $\Phi \,.\, \Psi$ a $\Psi^{-1} \,.\, \Phi^{-1}$ jsou mnohočleny reciprokální. Vyjděme od součinu $\Phi \,.\, \Psi \,.\, \Psi^{-1} \,.\, \Phi^{-1}$, místo něhož lze psáti

$$\Phi \,.\, (\Psi \,.\, \Psi^{-1}) \,.\, \Phi^{-1},$$

ježto skalární součiny dyadických mnohočlenů jsou associativní. Poněvadž $\Psi \,.\, \Psi^{-1} = \mathbf{I}$, jest

$$\Phi \,.\, \Psi \,.\, \Psi^{-1} \,.\, \Phi^{-1} = \Phi \,.\, \mathbf{I} \,.\, \Phi^{-1} = (\Phi \,.\, \mathbf{I}) \,.\, \Phi^{-1} = \Phi \,.\, \Phi^{-1} = \mathbf{I}$$

čili

$$(\Phi \,.\, \Psi) \,.\, (\Psi^{-1} \,.\, \Phi^{-1}) = \mathbf{I},$$

t. j. součiny $\Phi \,.\, \Psi$ a $\Psi^{-1} \,.\, \Phi^{-1}$ jsou reciprokální.

6. Z věty té, která platí i pro libovolný počet činitelů, plyne:

Dyadický mnohočlen, reciprokální k n-té mocnině dyadického mnohočlenu Φ, jest n-tou mocninou mnohočlenu reciprokálního se základem.

I jest

$$(\Phi^n)^{-1} = (\Phi^{-1})^n, \tag{173}$$

místo čehož lze psáti kratčeji Φ^{-n}.

7. Součet i skalární součin mnohočlenu dyadického Φ a jeho sdružené hodnoty Φ_C jest dyadický mnohočlen *symmetrický* neb *samosdružený* (t. j. mnohočlen vyhovující podmínce, že se rovná svému mnohočlenu sdruženému).

Neboť

$$(\Phi + \Phi_C)_C = \Phi_C + (\Phi_C)_C;$$

z definice sdružených mnohočlenů jest však zřejmo, že $(\Phi_C)_C = \Phi$, tudíž

$$(\Phi + \Phi_C)_C = \Phi_C + \Phi = \Phi + \Phi_C,$$

což jest podmínečná rovnice, aby dyadický mnohočlen byl symmetrický.

Podobně jest (vzhledem ke 3.)

$$(\Phi \,.\, \Phi_C)_C = (\Phi_C)_C \,.\, \Phi_C = \Phi \,.\, \Phi_C.$$

Lze pak ke každému mnohočlenu dyadickému Φ přidružiti dva mnohočleny symmetrické. První z nich, poloviční součet daného mnohočlenu Φ a jeho sdružené hodnoty Φ_C, označme dle *Jaumanna* $[\Phi]$; i bude

$$2\,[\Phi] = \Phi + \Phi_C. \tag{174a}$$

Druhý symmetrický mnohočlen, který poznačíme $\{\Phi\}$, definujme vzorcem

$$\{\Phi\}^2 = \Phi \,.\, \Phi_C. \tag{174b}$$

8. Rozdíl dyadického mnohočlenu Φ a jeho sdružené hodnoty Φ_C jest mnohočlen *antisymmetrický* (t. j. mnohočlen vyhovující podmínce, že se rovná svému mnohočlenu sdruženému vzatému s protivným znaménkem).

Neboť

$$(\Phi - \Phi_C)_C = \Phi_C - (\Phi_C)_C = -(\Phi - \Phi_C).$$

Antisymmetrický mnohočlen $\Phi - \Phi_C$ označíme kratčeji 2Π *).

---

*) Je-li dán mnohočlen Φ ve tvaru

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn},$$

jest

$$\Phi_C = \mathbf{la} + \mathbf{mb} + \mathbf{nc},$$

z čehož plyne

$$\Phi - \Phi_C = 2\Pi = \mathbf{al} - \mathbf{la} + \mathbf{bm} - \mathbf{mb} + \mathbf{cn} - \mathbf{nc}.$$

Nazveme-li vektoriální část tohoto mnohočlenu Π_v, obdržíme pro ni

$$2\Pi_v = \mathbf{a}\times\mathbf{l} - \mathbf{l}\times\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\mathbf{m} - \mathbf{m}\times\mathbf{b} + \mathbf{c}\times\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\mathbf{c};$$

9. Každý mnohočlen dyadický lze rozvrhnouti ve dva sčítance, z nichž jeden jest mnohočlen symmetrický a druhý antisymmetrický.

Neboť

$$\Phi = {}^1/_2\,(\Phi + \Phi_C) + {}^1/_2\,(\Phi - \Phi_C) \tag{175a}$$

čili používajíce zavedeného označení

$$\Phi = [\Phi] + \Pi\ *).$$

Toto rozvržení dyadického mnohočlenu lze provésti jen jediným způsobem.

Druhý mnohočlen Φ_2 a třetí skalár Φ_3 dyadického mnohočlenu. S každým dyadickým mnohočlenem

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$$

---

jelikož

$$\mathbf{l} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{l}$$

atd., změní se tato rovnice ve

$$\Pi_v = \mathbf{a} \times \mathbf{l} + \mathbf{b} \times \mathbf{m} + \mathbf{c} \times \mathbf{n},$$

což jest také vektoriální část Φ_v daného mnohočlenu Φ.

Vytvořme součin

$$\Pi \,.\, \mathbf{r} = {}^1|_2\,(\mathbf{al} - \mathbf{la} + \mathbf{bm} - \mathbf{mb} + \mathbf{cn} - \mathbf{nc}) \,.\, \mathbf{r};$$

výrazy

$$\mathbf{al} \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{la} \,.\, \mathbf{r}$$

atd. na pravé straně lze přetvořiti, použijeme-li vzorců (20a) a (16a), takto:

$$\mathbf{al} \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{la} \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{a}\,(\mathbf{l} \,.\, \mathbf{r}) - \mathbf{l}\,(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}) = (\mathbf{l} \,.\, \mathbf{r})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{r})\,\mathbf{l} = [\mathbf{l} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{r}$$

atd., tudíž

$$\Pi \,.\, \mathbf{r} = {}^1|_2\,[\mathbf{l} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{r} + {}^1|_2\,[\mathbf{m} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{r} + {}^1|_2\,[\mathbf{n} \times \mathbf{c}] \times \mathbf{r}$$

čili

$$\Pi \,.\, \mathbf{r} = {}^1|_2\,[\mathbf{l} \times \mathbf{a} + \mathbf{m} \times \mathbf{b} + \mathbf{n} \times \mathbf{c}] \times \mathbf{r}$$
$$= -\,{}^1|_2\,[\mathbf{a} \times \mathbf{l} + \mathbf{b} \times \mathbf{m} + \mathbf{c} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{r}.$$

Vložíme-li za trojčlen v závorce na pravé straně vektor Π_v, obdržíme

$$\Pi \,.\, \mathbf{r} = -\,{}^1|_2\,\Pi_v \times \mathbf{r}. \tag{176}$$

Položme dále na pravé straně za $\mathbf{r}$ skalární součin idemfaktoru $\mathbf{I}$ s tímto vektorem, nabudeme

$$\Pi \,.\, \mathbf{r} = -\,{}^1|_2\,\Pi_v \times (\mathbf{I} \,.\, \mathbf{r})$$

a vzhledem k zákonu associativnímu, v tomto případě platnému,

$$\Pi \,.\, \mathbf{r} = -\,{}^1|_2\,[\Pi_v \times \mathbf{I}] \,.\, \mathbf{r}.$$

Z této rovnice plyne dle definice (158)

$$\Pi = -\,{}^1/_2\,\Pi_v \times \mathbf{I}. \tag{177}$$

*) Majíce zření k rovnici (177) můžeme též psáti

$$\Phi = [\Phi] - {}^1|_2\,\Phi_v \times \mathbf{I}, \tag{175b}$$

ježto, jak bylo již pověděno, Π_v a Φ_v jsou stejné.

souvisí jiný mnohočlen tvaru

$$\begin{aligned}\Phi_2 = [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\,[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\,[\mathbf{n} \times \mathbf{l}]\\ + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}],\end{aligned} \qquad (178)$$

který můžeme nazvati *druhým* mnohočlenem, a skalární veličina tvaru

$$\Phi_3 = (\mathbf{abc})\,(\mathbf{lmn}), \qquad (179),$$

již zoveme *třetím* skalárem, ponechávajíce si pojmenování *první* a *druhý* skalár pro jiné výrazy.

Sluší tu především vytknouti, že, je-li mnohočlen Φ planární, t. j. jsou-li buď přední členy jeho $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nebo zadní členy $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ konplanární, musí $\Phi_3 = 0$, ježto skalární součin tří konplanárních vektorů rovná se nulle.

Je-li mnohočlen Φ lineární, t. j. jsou-li buď přední členy jeho $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nebo zadní členy $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ kollineární, musí $\Phi_2 = 0$, ježto vektoriální součiny kollineárních vektorů jsou rovny nulle. Pak ovšem také $\Phi_3 = 0$.

Též naopak platí:

Jestliže $\Phi_3 = 0$ a Φ_2 se nerovná nulle, jest mnohočlen Φ planární; je-li $\Phi_3 = 0$ a zároveň $\Phi_2 = 0$, jest mnohočlen Φ lineární.

Analytické výrazy pro Φ_2 a Φ_3 obdržíme takto:

Mnohočlen dyadický

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik}\\ + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk}\\ + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}\end{aligned}$$

pišme ve tvaru

$$\begin{aligned}\Phi = (a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k})\,\mathbf{i} + (a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k})\,\mathbf{j}\\ + (a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k})\,\mathbf{k}.\end{aligned} \qquad (\tau)$$

Srovnáme-li tento tvar s tvarem

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn},$$

tedy klademe-li

$$\mathbf{a} = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k} \text{ atd., dále } \mathbf{l} = \mathbf{i} \text{ atd.,}$$

nabudeme pro vektoriální součiny $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ atd. hodnoty

$$\begin{aligned}&\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}) \times (a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}),\\ &\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} \text{ atd.}\end{aligned}$$

Avšak dle vzorců (11) a (10) jest v těchto případech

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\,\mathbf{i} + (a_{32}a_{13} - a_{33}a_{32})\,\mathbf{j} \\ &\quad + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{m} \times \mathbf{n} &= \mathbf{i} \text{ atd.};\end{aligned}$$

tudíž

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\,\mathbf{ii} - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})\,\mathbf{ij} \\ &\quad + (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\,\mathbf{ik} \\ &\quad - (a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13})\,\mathbf{ji} + (a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13})\,\mathbf{jj} \\ &\quad - (a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})\,\mathbf{jk} \\ &\quad + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\,\mathbf{ki} - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\,\mathbf{kj} \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,\mathbf{kk}.\end{aligned}$$

Utvoříme-li ze součinitelů a_{ik} determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

jsou výrazy v závorkách na pravé straně této rovnice jeho subdeterminanty, jež jsou přidruženy k jednotlivým prvkům. Označíce A_{ik} subdeterminant, přidružený k a_{ik}, se znaménkem $\left\{\begin{matrix}\text{kladným}\\\text{záporným}\end{matrix}\right\}$ dle toho, je-li součet ukazovatelů $i + k$ $\left\{\begin{matrix}\text{sudý}\\\text{lichý}\end{matrix}\right\}$, nabudeme vzorce

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= A_{11}\mathbf{ii} + A_{12}\mathbf{ij} + A_{13}\mathbf{ik} \\ &\quad + A_{21}\mathbf{ji} + A_{22}\mathbf{jj} + A_{23}\mathbf{jk} \\ &\quad + A_{31}\mathbf{ki} + A_{32}\mathbf{kj} + A_{33}\mathbf{kk},\end{aligned} \tag{180a}$$

a pro sdružený mnohočlen

$$\begin{aligned}(\Phi_2)_C &= A_{11}\mathbf{ii} + A_{21}\mathbf{ij} + A_{31}\mathbf{ik} \\ &\quad + A_{12}\mathbf{ji} + A_{22}\mathbf{jj} + A_{32}\mathbf{jk} \\ &\quad + A_{13}\mathbf{ki} + A_{23}\mathbf{kj} + A_{33}\mathbf{kk}.\end{aligned} \tag{180b}$$

Podobně vyšetříme hodnotu třetího skaláru

$$\Phi_3 = (\mathbf{abc})\,(\mathbf{lmn}).$$

Užijeme-li opět výrazu (τ) pro Φ, můžeme psáti za první ze skalárních součinů tří vektorů na pravé straně této rovnice

$$\begin{aligned}(\mathbf{abc}) = (a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k} \quad & a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k} \\ & a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}),\end{aligned}$$

což se dle (15) rovná determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Druhý činitel (**lmn**) jest v tom případě roven součinu (**ijk**) $= 1$; pročež

$$\Phi_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (181)$$

(Pokračování.)

O silovém akustickém poli.

Rozšířená přednáška o IV. sjezdu přírodozpytců a lékařů českých v Praze r. 1908.

Napsal **František Kaňka**, professor v Praze.

(Pokračování.)

β) Ponderomotorické účinky v poli vnitřním.

Pokusy s korkovými pilinami a kuličkou z bezové dřeně vedou k týmž výsledkům, jako v poli vnějším. Kyvadélka s kuličkami z bezové dřeně přiskočí ke stěně i na rozkmitně i na uzlu; proti rozkmitně se pohybují kolmo na silokřivky. Destička se staví do stejnolehlosti se silokřivkami. Křídla mlýnků jsou opět tažena k uzlům, a můžeme tedy mlýnky roztočiti ve smyslu ručiček hodinových anebo proti nim. Postavíme-li dva hořící kusy svíček do pole vnitřního, jeden proti rozkmitně, druhý proti uzlu, nastane odpuzení plamene v obou případech, při tom však sploštění dle polohy silokřivek na pozorovaných místech; proti vrcholu rozkmitny se plamen rozšíří v plochu se stěnou sklenice rovnoběžnou, proti uzlu v plochu na stěnu kolmou.

Popsané úkazy uvnitř sklenice se jen jeví, jsou-li tělíska, na něž má pole působiti, v dosahu silokřivek vytvořených korkovými pilinami; na hvězdici, která zůstala nerozbrázděna,